

Идентификация уравнений генератора нейроподобной активности по экспериментальным сигналам

И. В. Сысоев¹, Д. И. Большаков²,
В. В. Матросов², М. А. Мищенко²

¹*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

²*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

Нейроинформатика 2024
Долгопрудный, 21 октября 2024

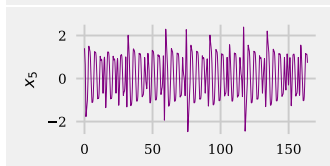
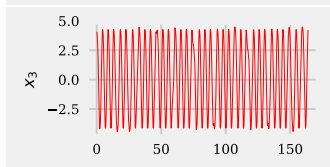
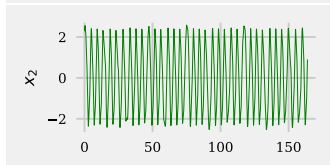
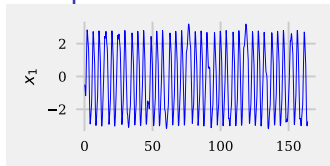
Введение в задачу реконструкции ОДУ по временным рядам

Пионерская работа [J. Cremers, A. Hübler. Construction of differential equations from experimental data // *Zeitschrift für Naturforschung — Section A*, **42** (8) (1987) 797–802.]

Метод работы со скрытыми переменными («белый ящик») [E. Baake, M. Baake, H. Bock, K. Briggs. Fitting ordinary differential equations to chaotic data // *Phys. Rev. A*, **45** (8) (1992) 5524–5529.]

Первый вариант универсального подхода с аппроксимацией полиномами и реконструкцией вектора состояния методом последовательного дифференцирования («чёрный ящик») [G. Gouesbet, C. Letellier. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial l2 approximation on nets // *Phys. Rev. E*, **49** (1994) 4955.]

Экспериментальные сигналы и уравнения



$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_D),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_D),$$

...

$$\frac{dx_D}{dt} = f_D(x_0, x_1, x_2, \dots, x_D),$$

где x_i суть переменные модели, f_i — неизвестные нелинейные функции, D — размерность системы (число переменных).

До этого времени было проведено большое количество исследований в области идентификации систем и построения моделей прогнозирования, в том числе:

Обзор различных методов аппроксимации нелинейных функций с применением уравнений Лоренца, Мэкки-Гласса и отображения Икеды: [Martin Casdagli. Nonlinear prediction of chaotic time series // \[Physica D, 35 \(3\) \(1989\) 335–356\]](#)

Использование нейронных сетей: [\[K. S. Narendra and K. Parathasarathy. Identification and control of dynamical systems using neural networks // IEEE Trans. Neural Networks, 1 \(1990\) 4–27.\]](#)

Проблемы универсальных подходов

Нужна априорная информация [\[V. S. Anishchenko, A. Pavlov, N. Janson. Global reconstruction in the presence of a priori information // Chaos, Solitons & Fractals 9 \(8\) \(1998\) 1267–1278.\]](#)

Мотивация (зачем это нужно?)

- Прогноз будущего поведения
- Прогноз бифуркаций и катастроф в системе
- Кластеризация сигналов и сегментация нестационарных рядов
- Тестирование и верификация наших моделей
- Детектирование и восстановление внешних воздействий
- Выявление и оценка связанности
- Защищённая передача информации
- Непрямые измерения

Распространённые модели нейронов

Модель нейрона
ФитцХью–Нагумо:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{du}{dt} &= u - cu^3 - v, \\ \frac{dv}{dt} &= u + a - bv,\end{aligned}$$

Модель нейрона Ходжкина–Хаксли:

$$\frac{dV}{dt} = [I_{stim} - g_{Na}m_i^3h_i(V - V_{Na}) - g_Kn^4(V - V_K) - g_L(V - V_L)]/C + \kappa_i,$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m,$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n,$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h,$$

$$\alpha_n(V) = \frac{0.8(V - 25)}{1 - e^{-(V-25)/9}}, \beta_n(V) = \frac{-0.002(V - 25)}{1 - e^{(V-25)/9}},$$

$$\alpha_m(V) = \frac{0.182(V + 35)}{1 - e^{-(V+35)/9}}, \beta_m(V) = \frac{-0.124(V + 35)}{1 - e^{(V+35)/9}},$$

$$\alpha_h(V) = 0.25e^{-(V+90)/12}, \beta_h(V) = \frac{0.25e^{-(V+62)/6}}{e^{(V+90)/12}},$$

Рассматриваемая система

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= z, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{dz}{dt} &= \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y.\end{aligned}\tag{1}$$

φ — текущая разность фаз подстраиваемого и опорного генератора,

γ — начальная частотная расстройка (внешний ток для нейрона),

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры инерционности фильтров,

y — единственная наблюдаемая — напряжение (потенциал на мембране).

История вопроса, часть 1 — модель

Предложена модель [Шалфеев В. Д. Исследование динамики системы фазовой автоподстройки частоты с разделительным конденсатором в цепи управления // Известия вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 3. С. 397–406]

Найдено нейроподобное поведение:

в автономной модели [Мищенко М. А. Нейроподобная модель на основе системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник Нижегородского университета. 2011. 5(3):279–282; Мищенко и др.

Нейроподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2012. 20(4):122–130; Matrosov et al. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J: Special Topics. 2013, 222(10):2399–2405]

в неавтономной модели [Мищенко и др. Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием // Известия вузов. ПНД. 2018. 26(5):6–19; Мищенко и др. Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсной последовательностью // Известия вузов. ПНД. 2021. 29(2):240–253]

в модели с запаздыванием [Сысоев и др. Нейроподобная динамика в системе фазовой автоподстройки частоты с запаздывающей обратной связью // Письма в ЖТФ, 2020. 46(14):36–38]

Актуальность и цель работы

Для классических моделей нейронов: Ходжкина–Хаксли, Моррис–Лекара, ФитцХью–Нагумо нет возможности реконструкции их по экспериментальным данным, потому что часть переменных не измеряются.

Предложенная модель может быть восстановлена по ряду одной переменной y , так как остальные можно получить численным интегрированием или дифференцированием.

Это даёт возможность кластеризации и идентификации разных нейронов по их сигналам в эксперименте.

Цель работы — научиться идентифицировать (восстанавливать параметры и проверять соответствие объекта модели по временному ряду) систему.

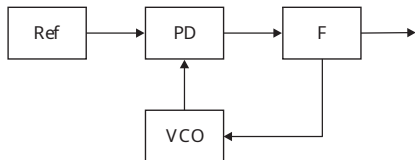
История вопроса, часть 2 — экспериментальный генератор

Собран экспериментальный генератор:

только колебательная динамика [*Мищенко М. А., Большаков Д. И., Матросов В. В.* Аппаратная реализация нейроподобного генератора с импульсной и пачечной динамикой на основе системы фазовой синхронизации // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, № 13. С. 10–18]

с возможностью реализации возбуждимого режима [*Большаков Д.И., Мищенко М.А., Матросов В.В., Сысоев И.В.* Электронный нейроподобный генератор с возбуждимым и автоколебательным режимом на основе системы фазовой автоподстройки частоты // Письма в ЖТФ, 2022 48(9): 23–26]

Схема экспериментального генератора и полосового фильтра



Структурная схема аппаратной модели нейроподобного генератора на основе системы фазовой синхронизации. VCO — генератор, управляемый напряжением; Ref — опорный генератор; PD — фазовый дискриминатор; F — фильтр в цепи управления.

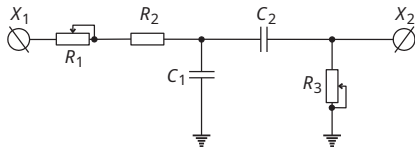
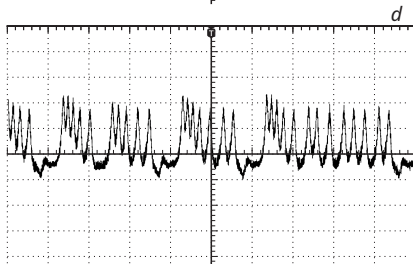
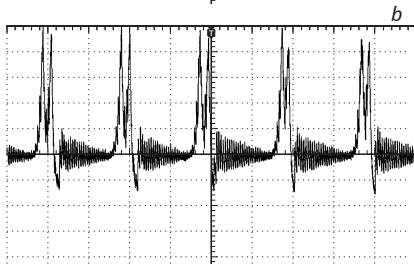
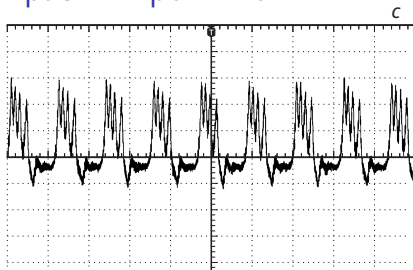
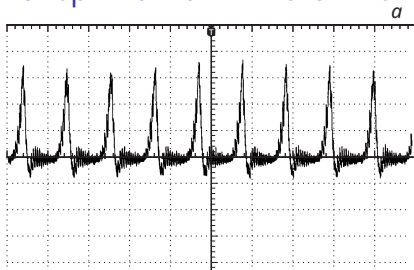


Схема полосового фильтра в цепи управления.

Экспериментальные сигналы в разных режимах



- a: регулярная импульсная активность,
b: регулярная пачечная активность с 2 импульсами в пачке,
c: регулярная пачечная активность с 5 импульсами в пачке,
d: хаотическая пачечная активность.

История вопроса, часть 3 — реконструкция

Предложены методы реконструкции:

отдельного автономного генератора с запаздыванием
[Сысоева и др. Реконструкция уравнений нейрноподобного осциллятора, моделируемого системой фазовой автоподстройки частоты с запаздыванием, по скалярному временному ряду // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 397–413]

сети генераторов без запаздывания [Sysoeva et al. Reconstruction of coupling structure in network of neuron-like oscillators based on a phase-locked loop // Chaos, Solitons & Fractals, 2021 142: 110513]

первой (без возможности возбуждимых режимов)
экспериментальной установки в автономном режиме
[Mishchenko et al. Identification of Phase-Locked Loop System from Its Experimental Time Series. IEEE Transactions on CAS II, 2022. 69(3):854–858]

Почему не реконструировать в лоб?

Для этого нужно восстановить недостающие компоненты вектора состояния $(\varphi, y, z, \frac{dz}{dt})$, после чего минимизировать разность квадратов вида:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\gamma}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} z - \frac{(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} y. \\ \alpha_0 &= \frac{\gamma}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \alpha_1 = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, f(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon_1 \cos \varphi}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \\ &\sum_{n=1}^N \left(\frac{dz}{dt} - \alpha_0 - \alpha_1 z + f(\varphi) y \right)^2 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (2)$$

В реальной системе нелинейная функция фазы $f(\varphi) = 1 + \varepsilon_1 \cos \varphi$ будет другая.

В реальной системе есть шум измерений и расчёт $\frac{dz}{dt}$ — второй производной наблюдаемой — будет сильно осложнён.

Интегрированные по времени уравнения

Исходная система:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= z, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{dz}{dt} &= \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y.\end{aligned}$$

Интегрированные по времени уравнения:

$$\begin{aligned}z &= \alpha_0 t + \alpha_1 y - \int f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} dt, & (3) \\ \alpha_0 &= \frac{\gamma}{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \\ \alpha_1 &= -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \alpha_0 t + \alpha_1 y - \int f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} dt, \\
 \int f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} dt &= \int f(\varphi) d\varphi = \Phi(\varphi), \\
 \Phi(\varphi) &= \alpha_0 t + \alpha_1 y - z.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Введём сортирующее отображение $Q(n)$, где n — номер точки в ряде, ставящее в соответствие n -той точке в исходном ряде её номер $Q(n)$ в отсортированном по возрастанию φ . Рассмотрим также обратное отображение Q^{-1} , вычисляющее по номеру в отсортированном ряде номер в исходном, так что $Q^{-1}(Q(n)) = n$. Рассмотрим точку, находящуюся в отсортированном ряде непосредственно перед $Q(n)$ -ной, тогда в исходном ряде она имеет номер $Q^{-1}(Q(n) - 1)$, который обозначим как p_n для краткости.

Целевая функция

$$\begin{aligned}\delta_n = \Phi(\varphi(n)) - \Phi(\varphi(p_n)) &= \alpha_0 \Delta t(n) + \alpha_1 \Delta y(n) - \Delta z(n) \\ \Delta t(n) &= t(n) - t(p_n), \\ \Delta y(n) &= y(n) - y(p_n), \\ \Delta z(n) &= z(n) - z(p_n),\end{aligned}\tag{5}$$

(6)

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2K+1}) = \sum_n \delta_n^2.\tag{7}$$

Свойства оценок

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2K+1}) = \sum_n \delta_n^2.$$

Так как функция Φ не только непрерывна, но и дифференцируема (по определению она является первообразною непрерывной функции f) на полуинтервале $0 \leq \varphi < 2\pi$, то $\delta_n \rightarrow d\Phi(\varphi(p_n))$, то δ_n является аппроксимацией дифференциала функции Φ в точке $\varphi(p_n)$ справа, или в точке $\varphi(n)$ слева, а для дифференцируемой функции в пределе это одно и то же.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L = \int_0^{2\pi} (d\Phi)^2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 (d\varphi)^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 d\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (8)$$

Проблемы измерительной функции

В действительности, невозможно измерить напряжение y , удаётся измерить только его линейную функцию:

$$y = a\eta + b \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y &= a\eta + b, & \varphi &= a\psi + bt + c, \\ \psi &= \int \eta dt, & z &= a\zeta, & \frac{dz}{dt} &= a \frac{d\zeta}{dt}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f_3(\psi) + \left. \frac{df_3(\psi+bt)}{dt} \right|_{t=0} t + \\ \left. \frac{d^2 f_3(\psi+bt)}{dt^2} \right|_{t=0} \frac{t^2}{2} + \dots = \alpha_0 t + \alpha_1 \eta + \alpha_1 b - z. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим первые члены ряда Тейлора:

$$\Phi(\psi) - \alpha_1 b = \alpha_1 \eta - z + \quad (12)$$
$$\left(\alpha_0 - \frac{d\Phi(\psi + bt)}{dt} \Big|_{t=0} \right) t - \sum_{k=2}^K \frac{d^k \Phi(\psi + bt)}{dt^k} \Big|_{t=0} \frac{t^k}{k!}$$

$$f_4(\psi) = \Phi(\psi) - \alpha_1 b \quad (13)$$

$$f_{4,1}(\psi) = \alpha_0 - \frac{d\Phi(\psi + bt)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (14)$$

$$f_{4,k}(\psi) = -\frac{1}{k!} \frac{d^k \Phi(\psi + bt)}{dt^k} \Big|_{t=0}, \quad k = 2, \dots, K. \quad (15)$$

$$f_4(\psi) = \beta_0 \eta + \sum_{k=1}^K \beta_k t^k - z \quad , \quad \beta_0 = \alpha_1, \quad (16)$$

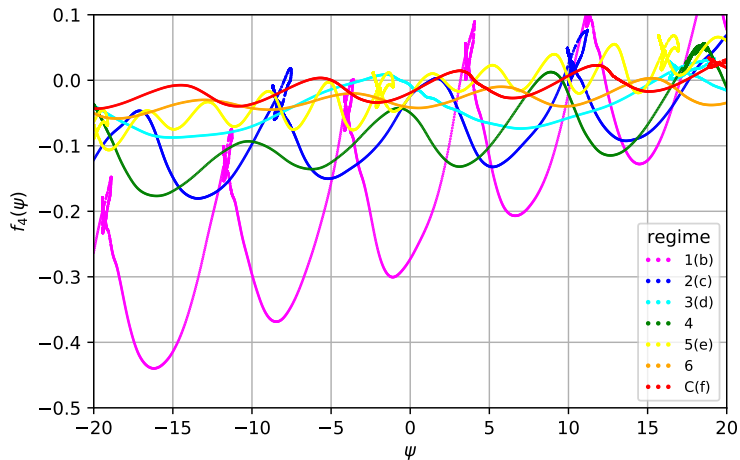
$$\beta_1 = \alpha_0 - \left. \frac{d\Phi(\psi_0 + bt)}{dt} \right|_{t=0} \quad , \quad \beta_k = - \left. \frac{d^k \Phi(\psi_0 + bt)}{dt^k} \right|_{t=0} .$$

$$\delta_n = \beta_0 \Delta \eta(n) + \sum_{k=1}^K \beta_k h_k(n) - \Delta z(n), \quad (17)$$

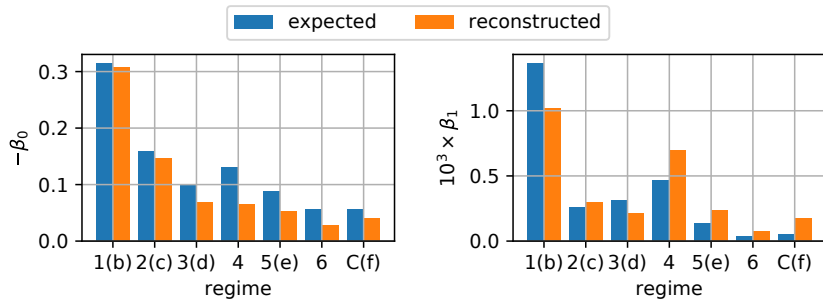
$$\Delta \eta(n) = \eta(n) - \eta(p_n),$$

$$\Delta z(n) = z(n) - z(p_n), \quad h_k(n) = t_n^k - t_{p_n}^k.$$

Результаты реконструкции нелинейной функции



Результаты реконструкции параметров



Выводы

Мы всё ещё находимся в начале пути.

- * Выбор адекватных моделей для реконструкции.
- * Совершенствование методов реконструкции уравнений.
- * Использование «промежуточных» объектов: электронных генераторов, клеток в растворе.