

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ходалицкий Д.Н., Мокин А.Ю., Савенкова Н.П.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, РФ, 119991, Москва,
Ленинские горы д. 1, стр. 52, +7 (495) 939-52-55, phd02250063@gse.cs.msu.ru

В работе рассматривается одномерная нестационарная задача теплопроводности с подвижной границей

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L(t), t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(L(t), t) = u_1, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq L(0), \end{cases} \quad (1)$$

где $u_0(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи (1). Коэффициент теплопроводности k считается постоянным. Функция $L(t)$ предполагается гладкой и принимающей положительные значения при всех $t \geq 0$.

С помощью замены переменного, задача сводится к задаче теплопроводности на отрезке фиксированной длины, аналитические решения которой были получены в двух случаях: 1) $L(t) = At + B$; 2) $L(t) = \sqrt{At + B}$.

Решение задачи (1) в первом случае имеет вид

$$u(x, t) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n(t)}{\sqrt{L(t)}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 k^2}{B} \left(\frac{t}{L(t)}\right)\right) \sin \frac{\pi n x}{L(t)} + \frac{x u_1}{L(t)} \exp\left(\frac{AL(t)}{4k^2}\right) \right) \times \\ \times \exp\left(\frac{-Ax^2}{4L(t)k^2}\right),$$

где

$$C_n(t) = \exp\left(\frac{\pi^2 n^2 k^2}{AB}\right) \frac{u_1 (-1)^n}{\pi n k^2} \int_{AB}^{AL(t)} [\zeta + 2k^2] \exp\left(\frac{\zeta}{4k^2} - \frac{\pi^2 n^2 k^2}{\zeta}\right) \frac{1}{2\sqrt{A\zeta}} d\zeta + C_n(0),$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ – известные функции.

Решение задачи (1) во втором случае имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n\left(\frac{x}{L(t)}\right) \left[\frac{F_n}{\lambda_n} + \left(T_n - \frac{F_n}{\lambda_n}\right) \left(\frac{B}{L^2(t)}\right)^{\frac{\lambda_n}{A}} \right] + \frac{x u_1}{L(t)}, \\ F_n = \frac{A u_1}{2} \int_0^1 \exp\left(\frac{A \zeta^2}{4k^2}\right) \zeta X_n(\zeta) d\zeta, T_n = \int_0^1 \exp\left(\frac{A \zeta^2}{4k^2}\right) [u_0(\zeta \sqrt{B}) - \zeta u_1] X_n(\zeta) d\zeta.$$

где $\lambda_n, X_n, n = 1, 2, 3, \dots$ – решение задачи Штурма-Лиувилля для оператора второй производной.

В работе приводятся примеры решения задачи (1).