О ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ ПАСКАЛЯ

Подольский В.С.

Уральский государственный университет им. пéрвого президéнта России Б.Н. Ельцина,
Специализированный учебно-научный центр УрФУ
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Технологическая 8, кв. 18,
Тел.: +7(343)368-01-11
E-mail: podolskyv@yandex.ru

Множество нечетных биномиальных коэффициентов, отображенных на плоскость в виде точек, имеет структуру треугольника Серпинского [1]. Обобщением этого случая является множество биномиальных коэффициентов, равных по p-адической норме, и это множество так же обладает фрактальной структурой [2]. Существующие подходы к оценке свойств фракталов описаны в теории меры и применимы к несчетным множествам. Рассмотренное множество счетно, соответственно цель данной работы состоит в обобщении методов оценки свойств фрактальных множеств, в частности вычислиения фрактальной размерности, на счетные множества. Отобразив биномиальные коэффициенты, равные по p-адической норме, в единичный квадрат в виде точек можно задать такое покрытие этого множества точек кругами, что количество кругов покрытия будет равно мощности множества. В [1] описан рекуррентный алгоритм вычисления числа биномиальных коэффициентов, равных по p-адической норме, из чего следует, что мощность множества можно вычислить по формуле $\mathscr{N}_p^l(n) = \frac{p^2+p}{2}\mathscr{N}_p^l(n-1) + \left(\frac{p^2-p}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{l-1}\left(\left(\frac{p^2+p}{2}\right)^{i-1}\mathscr{N}_p^{l-i}(n-1-i)\right)$. Тогда для вычисления фрактальной размерности множества по Минковскому нужно вычислить предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln\varepsilon} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathscr{N}_p^l(n))}{-\ln(1/p^n)}$. Построив нижнюю и верхнюю оценки функции $\mathscr{N}_p^l(n)$, по теореме о предельном переходе в неравенстве получаем $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathscr{N}_p^l(n))}{-\ln(1/p^n)} = \log_p\frac{p^2+p}{2}$. Из проведенного исследования сделаны следующие выводы: описанное множество имеет фрактальный характер, все описанные фракталы разбиваются на классы по размерности в соответствии со значением p. Счетное множество может рассматриваться как фрактал. Следует проводить дальнейшие исследования применимости результатов, полученных для несчетных множеств к счетным, имеющим фрактальные свойства.

Литература.

1. *Абачиев С. К.* О треугольнике Паскаля, простых делителях и фрактальных структурах // *В мире науки*, 1989, № 9. Стр. 75-78.
2. *Bannik T., Buhrman H.* Quantum Pascal's Triangle and Sierpinski's carpet // *preprint arXiv:1708.07429*, 2017. Стр. 8-12
3. *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции – М.: Мир, 1981, 192стр.