Вероятность и специальные функции математической физики

В.И. Заляпин

Институт естественных и точных наук
Южно-Уральского государственного университета

XXX конференция Математика. Компьютер. Образование
Челябинск - Пущино - Дубна, 23-27 января 2023

Классика

Еще в конце XIX – начале XX века было замечено, что многие аналитические проблемы могут быть сформулированы на теоретико-вероятностном языке, что позволяет вероятностными методами легко получать достаточно тонкие аналитические результаты.

Классическими примерами такого подхода могут служить

– доказательство С.Н.Бернштейна аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, получающееся применением закона больших чисел,

Классика

Еще в конце XIX – начале XX века было замечено, что многие аналитические проблемы могут быть сформулированы на теоретико-вероятностном языке, что позволяет вероятностными методами легко получать достаточно тонкие аналитические результаты.

Классическими примерами такого подхода могут служить

– доказательство С.Н.Бернштейна аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, получающееся применением закона больших чисел,

Классика

– известное предельное соотношение для многочленов Лежандра

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\cos\frac{\varphi}{n}) = J_0(\varphi),$$

следующее из закона арксинуса,

– тождество Неймана для функций Бесселя

$$I_n(x+y) = \sum_k I_k(x)\cdot I_{n-k}(y),$$

являющееся перефразировкой уравнения Колмогорова-Чепмена и др.

Классика

– известное предельное соотношение для многочленов Лежандра

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\cos\frac{\varphi}{n}) = J_0(\varphi),$$

следующее из закона арксинуса,

– тождество Неймана для функций Бесселя

$$I_n(x+y) = \sum_k I_k(x)\cdot I_{n-k}(y),$$

являющееся перефразировкой уравнения Колмогорова-Чепмена и др.

Основные задачи

Обнаруженная в начале 50-х годов прошлого столетия У. Феллером и Е.Б. Дынкиным связь между теорией полугрупп и марковскими переходными функциями положила начало систематическому изучению аналитических задач вероятностными методами.

К этим задачам можно отнести задачи классической теории специальных функций математической физики и их обобщений.

Случайное блуждание

Пусть $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ целочисленная сеть.
Зададим на сети $\mathbb{Z}^{n+k}$ случайное блуждание, регулируемое однородной переходной функцией

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+k} \;\; \mathrm{P}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathrm{P}\{\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\} = \begin{cases} p_j, & \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{e_j} \\ 0, & \mathbf{y} - \mathbf{x} \neq \mathbf{e_j} \end{cases}, \; \sum_{1}^{n+k} p_j = 1.$$

Пусть $A = (a_{ij})_{k \times (n+k)}$ – целочисленная матрица.
Положим $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}(modA)$ если $\exists \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{k}}$: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{m}A$

Рандомизация

Пусть скачки случайного блуждания регулируются пуассоновским процессом с параметром λ:

$$\mathrm{P}\{\mathrm{n_t} = \mathrm{s}\} = exp(-\lambda \cdot t) \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^s}{s!}.$$

$\Omega_n^k(A) = \mathbb{R}^{n+k}/A$ – фактор группа аддитивной группы $\mathbb{R}^{n+k}$:

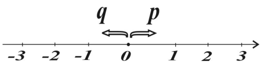
$$\Omega_n^k(A) = \{H_{\mathbf{x}}^A = \{y \in \mathbb{R}^{n+k} : \ \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{m}A\}\}.$$

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в Ω_n^k, порожденный рандомизованным случайным блужданием в $\mathbb{R}^{n+k}$. Если $\mathrm{P}\{\xi(\mathrm{t}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{A}}\}$ – вероятность за время t попасть из начала координат (класса H_0^A) в класс $H_{\mathbf{x}}^A$, то

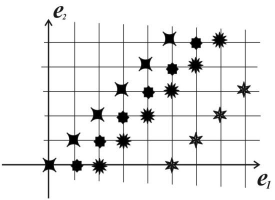
$$\mathrm{P}\{\xi(\mathrm{t}) \in \mathrm{H}_{\mathrm{x}}^{\mathrm{A}}\} = exp(-\lambda t)\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(t\mathbf{p}\lambda)$$

Пример. Бесселевы функции. Функции Люстерника

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_m \frac{z_1^{x_1+m} z_2^{x_2+m} \cdots z_{n+1}^{x_{n+1}+m}}{(x_1+m)!(x_2+m)! \cdots (x_{n+1}+m)!}$$



$A=(1,1) \Longrightarrow x=(x_1, x_2)=(x_1+m, x_2+m)$



$$A = (1, 1, \ldots, 1),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1+m, x_2+m, \ldots, x_{n+1}+m).$$

Функции пуассоновского блуждания

Функциями пуассоновского блуждания называем функции

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^k} \frac{\mathbf{z}^{\mathbf{x}+\mathbf{m}A}}{\Gamma(\mathbf{x}+\mathbf{m}A+I)}.$$

Здесь

$$\mathbf{x},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+k},\ \ \mathbf{z}^{\mathbf{x}} = \prod z_j^{x_j},\ \ \Gamma(\mathbf{x}+I) = \prod (x_j+1)!$$

Примеры.

1. $n=1,\ k=1,\ A=(1,1),\ \mathcal{G}_{x_1,x_2}(\frac{1}{2}z,\frac{1}{2}z)$ – модифицированные функции Бесселя $I_{x_1-x_2}(z)$

2. $n>1,\ k=1,\ A=(1,1,\ldots,1),\ \mathcal{G}_{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}}(\mathbf{z})$ – обобщенные цилиндрические функции (функции Люстерника Л.А.)

Функции пуассоновского блуждания

Примеры.

3. $n = 1,\ k = 1,\ A = (1, -2),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z)$ – многочлены Эрмита (с точностью до множителя)

4. $n = 2,\ k = 1,\ A = (1, 1, -1),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Лагерра

5. $n = 2,\ k = 1,\ A = (1, 1, -2),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Лежандра, многочлены Гегенбауэра, трехмерные сферические функции

6. $n = 3,\ k = 1,\ A = (1, 1, -1, -1),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Якоби, многочлены Лагранжа, четырехмерные сферические функции, гипергеометрия

7. $n = 3,\ k = 1,\ A = (1, 1, -1, -1),\ \mathcal{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ – многочлены Якоби, многочлены Лагранжа, четырехмерные сферические функции, гипергеометрия

ФПБ. Асимптотические разложения

Источником асимптотик для ФПБ служат предельные теоремы теории вероятностей.
Различные варианты ЦПТ приводят к различным асимптотическим формулам.
Например, классические асимптотики для бесселевых функций получаются из следующих простых соображений:
если $p_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ – пуассоновское распределение, то известно, что при $\lambda \gg 1$, $\lambda - k = o(\sqrt{\lambda})$ оно аппроксимируется нормальным. Сответственно, вероятности $\mathsf{P}\{\xi(\mathsf{t}) \in \mathsf{H}_\mathsf{x}^\mathsf{A}\}$ аппроксимируются нормальными.
Для функций Люстерника (в т.ч. для модифицированных функций Бесселя) может быть на этом пути получен аналог асимптотики Виленкина – Цукермана.

Случайные блуждания и спец. функции

- **В.И. Заляпин, Л.А. Люстерник** *О системе функций пуассоновского блуждания* // ДАН СССР, - 1972. - V.207, № 1 - P.29-32
- **В.И. Заляпин** *Обобщения цилиндрических функций* // ДАН СССР, - 1972. - V.207, № 5 - P.1029-1031
- **Л.А. Люстерник** *Новые работы по вероятностной теории специальных функций* // УМН - 1978. - т.XXXIII, вып. 3(201) - С.49-84

Случайные блуждания и спец. функции

- **В.И. Заляпин, Л.А. Люстерник** *О системе функций пуассоновского блуждания* // ДАН СССР, - 1972. - V.207, № 1 - P.29-32
- **В.И. Заляпин** *Обобщения цилиндрических функций* // ДАН СССР, - 1972. - V.207, № 5 - P.1029-1031
- **Л.А. Люстерник** *Новые работы по вероятностной теории специальных функций* // УМН - 1978. - т.XXXIII, вып. 3(201) - С.49-84

Случайные блуждания и спец. функции

- **В.И. Заляпин, Л.А. Люстерник** *О системе функций пуассоновского блуждания* // ДАН СССР, - 1972. - V.207, № 1 - P.29-32
- **В.И. Заляпин** *Обобщения цилиндрических функций* // ДАН СССР, - 1972. - V.207, № 5 - P.1029-1031
- **Л.А. Люстерник** *Новые работы по вероятностной теории специальных функций* // УМН - 1978. - т.XXXIII, вып. 3(201) - С.49-84

- В.И. Заляпин *Специальные функции математической физики. Вероятностный подход* // В кн. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Тезисы докладов 4 международной конференции посвященной 90-летию со дня рождения Л.Д. Кудрявцева. Изд. РУДН, М., 25–29 марта 2013 -С.188–189
- В.И. Заляпин *Вероятностная структура специальных функций* // В кн. Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Сборник статей международной конференции, Москва, Изд. центр РУДН, 2015 - С. 101-105

- В.И. Заляпин *Специальные функции математической физики. Вероятностный подход* // В кн. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Тезисы докладов 4 международной конференции посвященной 90-летию со дня рождения Л.Д. Кудрявцева. Изд. РУДН, М., 25–29 марта 2013 -С.188–189
- В.И. Заляпин *Вероятностная структура специальных функций* // В кн. Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Сборник статей международной конференции, Москва, Изд. центр РУДН, 2015 - С. 101-105

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ !