

ВОЛНЫ В УРАВНЕНИЯХ РЕАКЦИИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГЕНОВ

Разжевайкин В.Н.

Вычислительный центр им.А.А. Дородницына РАН, Россия, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, 40. Тел.: (499)-135-00-80, факс (499)-135-61-59, e-mail: razzh@mail.ru

Математическая модель распространения генных волн, описанная в работе А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова (1937), может быть уточнена, путем учета зависимости коэффициента диффузии от зависимой переменной. Потребность учета такой зависимости возникает и в ряде других задач моделирования динамики распределенных систем, восходящих преимущественно к экологии и эпидемиологии.

Исследовалось уравнение реакции – диффузии вида $u_t = D(u)(N(u)u_x)_x + F(u)$, где $u = u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $D(u) > D_0 > 0$, $N(u) > N_0 > 0$, $F(0) = F(1) = 0$, $F'(1) < 0$. Оказывается, что многие результаты о распространении бегущих волн, установленные для случая постоянной диффузии могут быть с незначительными изменениями распространены на случай приведенного выше уравнения. Вот некоторые из них.

1) В триггерном случае $F'(0) < 0$ существует не более одной волны, т.е. монотонного решения вида $u = \tilde{u}(x + ct)$ с $\tilde{u}(-\infty) = 0$ и $\tilde{u}(+\infty) = 1$. $c \in \mathbb{R}$ - скорость.

2) Альтернативой существованию волны в триггерном случае является существование единственной цепочки волн с невозрастающими значениями скорости.

3) В строго колмогоровском случае (т.е. при $F(u) > 0$ при всех $u \in (0, 1)$) волновое решение существует для любых $c \geq c^*$, где $c^* \in [c_m, c_M]$,

$$c_m = 2\sqrt{N(0)D(0)F_U(0)}, \quad c_M = 2\sqrt{D_M\gamma}, \quad \gamma = \sup_{U \in (0,1)} \frac{N(U)F(U)}{U}.$$

4) В нестрого колмогоровском случае (т.е. при $F(u) > 0$ при $u \in (0, \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$) диапазон возможных значений скорости исходящей из $u = 0$ волны сужается вплоть до его исчезновения по мере увеличения размаха волны. На ее хвосте формируется цепочка волн с невозрастающими значениями скорости.

5) Начальные монотонные распределения стабилизируются по форме к цепочке волн с невозрастающими значениями скорости как в триггерном, так и в колмогоровском случае при асимптотике на $x \rightarrow -\infty$, $u(x, 0) \rightarrow 0$, соответствующей волне, распространяющейся с минимальной скоростью $c = c^*$.

6) В строго колмогоровском случае имеет место сходимость к волне, скорость которой определяется экспоненциальным показателем указанной асимптотики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Код проекта 09-07-00398