

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Ходалицкий Д.Н., Мокин А.Ю., Савенкова Н.П.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, каф. ВМ,
Россия, 119991, г. Москва, ул. Ленинские горы д.1, стр. 52, 2-й учебный корпус
s02230544@gse.cs.msu.ru

В работе рассматривается нестационарное уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности и граничными условиями смешанного типа

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = u_0(t), \quad \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) (L, t) + \alpha(u(L, t) - u_{\text{вн}}) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (1)$$

где $\phi(x) = K \left(u - u_0(0) \right) \int_0^x \frac{ds}{k(s)}$, $K = \left(\frac{1}{\alpha} + \int_0^L \frac{ds}{k(s)} \right)^{-1}$ - решение соответствующей стационарной задачи

$$\begin{cases} \left(k(x)u'(x) \right)' = 0, & 0 < x < L, \\ u(0) = u_0(0), \quad k(L)u'(L) = -\alpha(u(L) - u_{\text{вн}}). \end{cases}$$

Методом разделения переменных получено решение задачи (1) в виде функционального ряда

$$u(x, t) = u_0(t) + K \left(u - u_0(t) \right) \int_0^x \frac{ds}{k(s)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k(0)X'_n(0)}{\lambda_n} \int_0^t u'_0(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right) X_n(x),$$

где λ_n и X_n - решение задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -(k(x)X'(x))' = \lambda X(x), & 0 < x < L, \\ X(0) = 0, \quad k(L)X'(L) + \alpha X(L) = 0. \end{cases}$$

Проведено исследование по выбору числа гармоник функционального ряда, необходимых для определения величины потока в точке $x = 0$ с заданной точностью.

Результаты вычислений демонстрируются наглядными примерами, имеющими конкретную физическую интерпретацию.

Задача (1) моделирует процесс теплообмена с окружающей средой через композитную теплоизоляцию толщины L . При этом точка $x = 0$ соответствует внутренней поверхности теплоизоляции, а точка $x = L$ - внешней поверхности. Качество теплоизоляции определяется величиной теплового потока в точке $x = 0$. Поэтому результаты проведенных исследований имеют большое прикладное значение при моделировании процесса теплообмена в промышленной электролизной ванне, стенки которой имеют многослойную теплоизоляцию.