ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ И ИНТЕГРАЛЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Архипова Л.Г.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
механико-математический факультет, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1

Пусть k — натуральное число, E обозначает единичный k-мерный куб, состоящий из векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ с вещественными координатами $\alpha_s, s = 1, \ldots, k$, и пусть $f(x) = f_k(x) = \sum\limits_{s=1}^{k} \alpha_s x^s$ — многочлен степени k. Рассмотрим ряд $h(f) = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i f(n)}}{n}$, где суммирование распространяется по всем целым n, исключая $n = 0$, и его симметричные частичные суммы вида $h_N(f) = \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{e^{2\pi i f(n)}}{n}, N \geq 1$.

Используя метод тригонометрических сумм И.М. Виноградова, Г.И. Архипов и К.И. Осколков доказали [1] следующее утверждение о равномерной ограниченности симметричных частичных сумм $h_N(f)$.

Теорема 1.*Пусть $k \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Тогда для многочлена $f_k \neq 0$ имеем $\sup\limits_{N \geq 1} \sup\limits_{f_k} |h_N(f_k)| = g_k < \infty$. Более того, для каждого многочлена $f_k \neq 0$ последовательность $\{h_N(f_k)\}$ сходится при $N \to \infty$, так что сумма ряда $h(f_k)$, рассматриваемая как предел ее симметричных частичных сумм $h_N(f_k)$, определена и ограничена всюду на множестве многочленов степени k.*

В частности, К. И. Осколков нашел [2], что утверждение теоремы 1 может быть сформулировано в терминах функциональных свойств обобщенных решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \Psi(x,t)|_{t=0} = f(x)$ с периодическими (период 1) начальными условиями $f(x)$. Он доказал следующее утверждение.

Теорема 2.*Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на периоде. Тогда существует решение уравнения Шрёдингера, ограниченное всюду на плоскости $\{x, t\}$.*

Г.И. Архипов нашел следующий интересный результат (без доказательства).

Теорема 3.*Пусть $u = u(x,t)$ — обобщенное решение задачи Коши уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad u|_{t=0} = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Тогда оно существует, ограничено и для всех иррациональных t непрерывно по x. Если $t = a/q, (a,q) = 1$, то при некоторых ограничениях на знаменатель q функция $u(x, a/q)$ имеет только разрывы 1-го рода со скачками $b(q)$ в числе q на периоде.*

Доказательство теоремы 3 на основе анализа Фурье дано нами.

Литература.

1. *Архипов Г. И., Осколков К.И.* Об одном специальном тригонометрическом ряде и его применениях // Матем. сб., 1987, том 176, номер 2, 147–157

2. *Осколков К. И.* Ряды и интегралы И.М. Виноградова и их приложения // Тр. МИАН СССР, 1989, том 190, 186–221