РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Малаховский Н.В.

Пусть $A_1A_2A_3A_4$ - заданный (базисный) тетраэдр и M - произвольная точка пространства. Тогда существуют однозначно определенные действительные числа μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, удовлетворяющие условиям $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1$ и $\overrightarrow{OM}=\mu_1\overrightarrow{OA_1}+\mu_2\overrightarrow{OA_2}+\mu_3\overrightarrow{OA_3}+\mu_4\overrightarrow{OA_4}$, где O - произвольная точка пространства. Числа μ_1,μ_2,μ_3,μ_4 называются барицентрическими координатами точки M относительно тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ (Б-координатами) и записываются в виде $M(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)$. Назовём вектор (2) барицентрическим радиус-вектором точки M (Б-вектором) и заметим, что вершины базисного тетраэдра имеют Б-координаты $A_1(1,0,0,0)$, $A_2(0,1,0,0)$, $A_3(0,0,1,0)$, $A_4(0,0,0,1)$ (1). Пусть $A_1A_2A_3A_4$-заданный тетраэдр, а $P(p_1,p_2,p_3,p_4)$,$Q(q_1,q_2,q_3,q_4)$, $R(r_1,r_2,r_3,r_4)$, $S(s_1,s_2,s_3,s_4)$-четыре произвольные точки пространства, заданные своими Б-координатами. Расстояние между точками P и Q определяется через Б-координаты этих точек и длины сторон $A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_2A_3,A_2A_4,A_3A_4$ базисного тетраэдра по формуле $-PQ^2=\sum\limits_{1\le i<j\le 4}(p_i-q_i)(p_j-q_j)A_iA_j^2$. В докладе рассматриваются стереометрические задачи, решаемые методом барицентрических координат, одну из таких задач мы приводим в тезисах.

Задача 1. *На рёбрах AA_1,BB_1,CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ даны соответственно точки P,Q,R такие, что $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{BQ}=l\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{CR}=m\overrightarrow{CC_1}$. Через вершину A и центр симметрии S грани BB_1CC_1 проведена прямая g, пересекающая плоскость PQR в точке M. Вычислить отношение $p=AM:AS$.*

Решение. Примем точки A,B,C,A_1 за вершины базисного тетраэдра. В силу (1) имеем $A(1,0,0,0)$, $B(0,1,0,0)$, $C(0,0,1,0)$, $A_1(0,0,0,1)$. Используя равенства (2) и учитывая, что $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA}$ находим $\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OQ}=-l\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+l\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OR}=-m\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{OA_1}$. Поэтому $P(1-k,0,0,k)$, $Q(-l,1,0,l)$, $R(-m,0,1,m)$. Так как S центр симметрии грани BB_1CC_1, то $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}}{4}$ или $\overrightarrow{OS}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1}$. Поэтому $S\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Из условия задачи следует, что $\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{AS}$. Тогда $\overrightarrow{OM}=\left(1-\frac{3p}{2}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{p}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{p}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{p}{2}\overrightarrow{OA_1}$. Поэтому $M\left(\frac{2-3p}{2},\frac{p}{2},\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$. Используя условие принадлежности четырёх точек P,Q,R,M одной плоскости находим $p=\dfrac{2k}{1+2k-l-m}$. В случае $m+l=1+2k$ плоскость PQR параллельна прямой AS. При $k=0,m+l=1$ плоскость PQR проходит через прямую AS.

Литература.

1. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. Москва «Наука» 1987.
2. З.А. Скопец, Р.А. Хабиб Преподавание геометрии в 9-10 классах. Москва «Просвещение» 1980.
3. В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович Практикум по элементарной математике. Геометрия. Москва «Просвещение» 1992.