ОБ АЛГЕБРАХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С СЕМЕЙСТВАМИ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Кабанко М.В.

Курский государственный университет,Физико-математический факультет, каф. математического анализа и прикладной математики, Россия,305 000, г. Курск, ул. Радищева, 33,Тел. +7(471)256-80-61
[1]

Известно что, что интерполяционные пространства, построенные для семейств пространств (для случая больше двух пространств), по вещественным $K-$ и $J-$ методам не совпадают, в отличие от пар пространств. В.И. Овчинников высказал гипотезу, что такие экстремальные свойства, связаны с простым устройством алгебр операторов, действующих в этих семействах. Приведенные ниже примеры частично подтверждают эту гипотезу.

Пусть $\{H_0, H_1\}$ – вложенная гильбертова пара, то есть $H_0 \hookrightarrow H_1$. Рассмотрим интерполяционной пространство построенной по вещественному методу $(H_0, H_1)_{\theta,\infty}$, где $0 \le \theta \le 1$. Выберем вектор $a \in (H_0, H_1)_{\theta,\infty}$ такой, что a не является элементом пространства H_1 и обозначим H_2 – одномерное пространство, порождённое вектором a с нормой из пространства H_0. Рассмотрим тройку пространств $\overrightarrow{H} = \{H_0, H_1, H_2\}$. В силу построения пространства H_2, пересечение этой тройки совпадает с $\{0\}$.

Предложение 1. Алгебра операторов, действующих в тройке $\overrightarrow{H} = \{H_0, H_1, H_2\}$, совпадает со множеством скалярных операторов.

Доказано, что существуют семейства даже бесконечномерных пространств, с нулевым пересечением, в которых алгебра операторов, совпадает с множеством скалярных операторов. Если же пересечение семейства конечномерно, то оператор, действующий в этом семействе, раскладывается в сумму скалярного и оператора, отображающего сумму пространств в пересечение. Более того, есть примеры семейств весовых гильбертовых пространств, в которых алгебры операторов имеют такое-же строение, т.е. в этих семействах множество интерполяционных и промежуточных пространств совпадают.

Рассмотрим гильбертовы пары $\{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1})\}$, где $\omega_j = 2^{-2^j}$ и $\{l_2(u), l_2(v)\}$, где

$$u_{2n-1} = 2^{2^{2n-1}},\ u_{2n} = 2^{2^{2n}},\ u_{2n+1} = 2^{-2^{2n+1}},\ u_{2n+2} = 2^{-2^{2n+2}};$$

$$v_{2n-1} = 2^{-2^{2n-1}},\ v_{2n} = 2^{-2^{2n}},\ v_{2n+1} = 2^{2^{2n+1}},\ v_{2n+2} = 2^{2^{2n+2}}.$$

Если, кроме этого, рассмотреть пространство $N = \{\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_2(2^{2^j}) | \sum\limits_{j=1}^{\infty} \xi_j = 0\}$, то получим совместную гильбертову пятёрку пространств.

Предложение 2. Операторы, действующие в пятёрке $\overrightarrow{H} = \{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1}), l_2(u), l_2(v), N\}$, представимы в виде суммы скалярного оператора и оператора, отображающего сумму семейства пространств в пересечение.