О СХОДИМОСТИ СЕТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИЛЬНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Ершова Т.Я.

МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр.52, +7(495)9391120, ersh@cs.msu.ru

Рассматривается следующая задача:

$$\varepsilon u'''(x) + r\, u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad \varepsilon \in (0,1], \quad r > 0,$$
$$u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2, \quad u'(1) = g_3.$$

Решение этой задачи имеет сильный пограничный слой вблизи точки $x = 0$, т.е. производная решения в этой точке неограничена при $\varepsilon \to 0$ и структура слоя определяется функцией $e^{-rx/\varepsilon}$, что вызывает сложности при оценке точности решения. Необходимость изучения сингулярно возмущенных задач для уравнения третьего порядка возникает, например, в теории дисперсионных систем и тонкопленочных течений. Для уравнения третьего порядка до сих пор равномерные оценки сходимости сеточных решений исследовались только для задачи со слабым пограничным слоем, имеющим структуру $\varepsilon e^{-rx/\varepsilon}$ (см. обзор работ в [1]). Так в работе [1] для решения задачи со слабым пограничным слоем на сетке Шишкина получена оценка $\left\|u(x_i) - u_i\right\|_{h,\varepsilon} \le c\, N^{-1} \ln N$. Но использовать технику получения этой оценки в случае задачи, решение которой имеет сильный пограничный слой, не представляется возможным [1, замечание 6].

В предлагаемой работе для задачи с сильным пограничным слоем получена оценка погрешности решения соответствующей разностной задачи на сетке Шишкина равномерно по малому параметру:

$$\left\|u(x_i) - u_i\right\|_{W^h_{1,\infty,\varepsilon}} = \max_{0\le i\le N} \left|(u(x_i) - u_i)\right| + \varepsilon \max_{1\le i\le N} \left|(u(x_i) - u_i)_{\bar{x}}\right| \le c\, N^{-1} \ln N.$$

Для доказательства этого утверждения используется декомпозиция решения дифференциальной задачи. Дана оценка погрешности аппроксимации разностного уравнения в соответствующей норме. Исходное разностное уравнение путём суммирования преобразуется в разностное уравнение второго порядка, для которого справедлив аналог принципа максимума и известны оценки функции Грина [2].

Численное исследование подтверждает теоретически полученный результат.

Литература.

1. Roos H.-G., Teofanov L., Uzelac Z. Uniformly convergent difference schemes for a singularly perturbed third order boundary value problem. // Applied Numerical Mathematics. 96, (2015), Стр. 108-117.
2. Андреев В. Б. Функция Грина и априорные оценки решений монотонных трехточечных сингулярно возмущенных разностных схем. // Дифференц. уравн. 37, (2001), № 7, Стр. 880–890.