О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

Люлько Н.А.

Новосибирский государственный университет; Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, проспект акад. Коптюга, 4, 89231979374, natlyl@mail.ru

Для линейной автономной распавшейся гиперболической системы рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{(x,t):\ 0 < x < 1,\ t > 0\}$ смешанную задачу

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \qquad u(0) \in L_2(0,1) \qquad (0 < t < \infty) \tag{1}$$

где $u = (u_1, ..., u_n) -$ n-мерная вектор-функция, и $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $(Au)(x) = -au_x + bu$, $D(A) = \{u \in W_1^2(0,1): u_{out} = Pu_{in}\}$; $n \ge 2$. Здесь $a, b \in C^1[0,1] -$ диагональные матрицы размерности n, при этом первые m элементов матрицы a положительны, а остальные – отрицательны; $0 \le m \le n.$. Постоянная матрица P задает для (1) граничные условия отражения, где $u_{out} = (u_1(0), ..., u_m(0), u_{m+1}(1), ..., u_n(1))$, $u_{in} = (u_1(1), ..., u_m(1), u_{m+1}(0), ..., u_n(0))$.

Известно [1], что задача (1) корректна и при некоторых граничных условиях является сверхустойчивой, т.е. все решения этой задачи убывают к нулю быстрее экспоненты в любой степени [2]. Исследование спектра и резольвенты оператора A позволяет доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Задача (1) сверхустойчива $\Leftrightarrow$ когда она обладает конечным временем стабилизации всех решений к нулю (причем это время не зависит от $u(0)$).

Теорема 2. Задача (1) сверхустойчива $\Leftrightarrow$ когда спектр оператора A пустой.

Теорема 3. Задача (1) сверхустойчива для любых матриц $a, b \Leftrightarrow$ когда матрица, составленная из абсолютных значений матрицы P, является нильпотентной.

В [1] рассматриваются возмущенные к сверхустойчивым задачам (1) гиперболические системы, имеющие вид

$$u_t + a(x)u_x = (b(x) + \tilde{b}(x))u, \qquad u_{out} = Pu_{in}, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

где $\tilde{b} \in C^1[0,1] -$ матрица, u_0 - известная функция. Доказано, что при определенных возмущениях $\tilde{b}$ задача (2) будет экспоненциально устойчива в $L_2(0,1)$, а также она будет обладать свойством повышения гладкости из $L_2(0,1)$ в $C^1[0,1]$. Показано использование этих результатов для анализа устойчивости различных математических моделей.

Литература

1. *Kmit I., Lyul`ko N. Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // J. Math. Anal. Appl. V. 460, N 2, 2018. P. 838-862.*
2. *Balakrishnan A.V. Superstability of systems // Appl. Math Comput. V. 164, N 2, 2005. P. 321-326.*