

ЦЕНТРОИДНЫЕ ВЕРШИНЫ ДЕРЕВА

Белов Ю.А.

Россия, 150000, Ярославль, ул. Советская, 14, т. (4852) 458073,
ЯрГУ им. П.Г. Демидова, кафедра теоретической информатики belov45@yandex.ru

Рассматривается дерево T – связный граф без циклов. Порядок графа $n(T)$ – количество его вершин. Как известно, количество рёбер при этом равно $n-1=R(T)$, оно иногда называется *размером* дерева. Для произвольной вершины v дерева можно рассмотреть набор поддеревьев, называемых ветвями данной вершины. Ветвь, при вершине v , есть максимальный подграф графа T , для которого данная вершина является концевой. Количество ветвей, примыкающих к данной вершине v , равно степени этой вершины. Ветви, примыкающие к данной вершине v , не имеют общих рёбер и только одну общую вершину – вершину v , сумма размеров всех ветвей, примыкающих к произвольной вершине, равна размеру графа T : $n-1=R(T)$.

Определение. Для произвольной вершины v дерева T *весом* вершины называется максимум размеров ветвей, примыкающих к данной вершине v ; будем обозначать его через $w(v)$.

Например, если v – концевая вершина дерева, то к ней примыкает ровно одна ветвь, размер её равен $n-1$ и она просто совпадает со всем исходным графом. Таким образом, вес любой концевой вершины равен $n-1$. Вообще вес вершин, очевидно, находится в пределах от 1 до $n-1$.

Определение. Вершина называется центроидной, если её вес наименьший среди всех вершин дерева.

Получены следующие факты для центроидных вершин.

1. Вес любой центроидной вершины не превосходит $\frac{n}{2}$ и обратно, если вес некоторой вершины не превосходит $\frac{n}{2}$, то она – центроидная.

2. Если в дереве имеется центроидная вершина v веса $\frac{n}{2}$, то имеется и другая центроидная вершина (естественно, того же веса), смежная с первой.

3. Если в дереве имеется более одной центроидной вершины, то порядок дерева чётный и вес любой центроидной вершины равен $\frac{n}{2}$.

4. В любом дереве может быть только одна или две центроидные вершины, которые при этом смежны. (следствие 1, 2, 3).

Однако, не всякое дерево чётного порядка является бицентрическим.