РОБАСТНЫЕ СЕМЕЙСТВА МАТРИЦ С k-ДИАГОНАЛЬНЫМ ПРЕОБЛАДАНИЕМ

Зеленков Г.А., Зубов Н.В.[1], Черноглазов Д.Г.

Морская государственная академия им. Ф.Ф.Ушакова,
Россия, 353918, Новороссийск, пр-т Ленина, 93,
тел. (8-3217)-61-0076, E-mail: mathshell@mail.ru
[1] Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

Исследование робастной устойчивости и неустойчивости матричных семейств является значительно более сложной задачей, чем исследование полиномиальных семейств.

Матрицу $A \in R^{n\times n}$ назовем матрицей с k-диагональным преобладанием если k ее элементов на главной диагонали имеют положительное диагональное преобладание по строке, а остальные $n-k$ элементов на этой диагонали имеют отрицательное диагональное преобладание по строке. Рассмотрим интервальное матричное семейство:

$$\tilde{A} = A_0 + \Delta,\ \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}),\ \tilde{a}_{ij} = a_{ij}^0 + \Delta_{ij}, \left|\Delta_{ij}\right| \le \gamma\alpha_{ij},\ \gamma > 0, \alpha_{ij} \ge 0\ \ i, j = \overline{1,n},\ \sum_{i,j} \alpha_{ij} > 0 .$$

Номинальная матрица $A_0 = \left(a_{ij}^0\right)$ – k-диагональная. Точнее, для k и остальных $n-k$ диагональных элементов соответственно выполняется:

$$\rho_1(A_0) = \min_{1\le i\le n} (a_{ii}^0 - \sum_{j\ne i} \left|a_{ij}^0\right|) > 0,\ \rho_2(A_0) = \min_{1\le i\le n} (-a_{ii}^0 - \sum_{j\ne i} \left|a_{ij}^0\right|) > 0 .$$

Заметим, что в первом случае $a_{ii} > 0$, а во втором $a_{ii} < 0$.Обозначим $\rho(A_0) = \min\left(\sigma_1(A_0), \sigma_2(A_0)\right)$, тогда $\rho(A_0) = \min_i(\left|a_{ii}^0\right| - \sum_{j\ne i}\left|a_{ij}^0\right|)$.

Теорема. Для того, чтобы все матрицы интервального матричного семейства $\tilde{A}$ были k-диагональными необходимо и достаточно, чтобы номинальная матрица A_0 была k-диагональной и размах неопределенности γ был меньше, чем k-радиус γ_k^*,
$\gamma_k^* = \min_i((\left|a_{ii}^0\right| - \sum_{j\ne i}\left|a_{ij}^0\right|) / \sum_j \alpha_{ij})$. Если $\alpha_{ij} \equiv 1$, $i, j = \overline{1,n}$, то $\gamma_k^* = \dfrac{\rho(A_0)}{n}$.

Таким образом, удалось найти в явном виде радиус k-диагонального преобладания (k-радиус) интервального матричного семейства. Очевидно, при $k = 0$ получим радиус сверхустойчивости такого семейства со сверхустойчивой номинальной матрицей.

Замечание. Можно построить формулы радиуса k-диагональности для интервального семейства $\tilde{A}$ из $C^{n\times n}$ с k-диагональным преобладанием по реальной части диагональных элементов.