

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ОСОБЕННОСТЬЮ В ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Ершова Т.Я.

Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория разностных методов

Рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии в прямоугольнике $\Omega = (0, 1)(-1, 1)$ с границей $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} Lu \equiv -\varepsilon\Delta u + a \frac{\partial u}{\partial x} + qu &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad \varepsilon \in (0, 1], \\ a = \text{const} > 0, \quad q = \text{const} > 0, \quad u &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Известно [1], [2], что в случае достаточно гладких граничных функции решение задачи может иметь при малых ε регулярный экспоненциальный слой около правой границы, через которую поток покидает область, характеристические параболические слои около границ параллельных потоку, а также угловые особенности, поскольку не предполагаются дополнительные условия согласования в углах области кроме минимальных. Эти особенности вызывают большие трудности при численном решении задачи и их необходимо учитывать. Последние годы эти задачи привлекают внимание многих исследователей и ими получены существенные результаты.

В данной работе рассматривается задача в том случае, когда на входе потока в область граничная функция имеет разрыв первой производной, что порождает внутренний характеристический слой. Исследуется сходимость сеточного решения задачи. Исходное уравнение аппроксимируется классической пятиточечной разностной схемой с направленной разностью. Опираясь на результаты [1], [2],[3] в данной работе получено, что при использовании около внутреннего слоя равномерной сетки, а в окрестностях пограничных слоев соответственно сгущающихся сеток Шишкина, скорость сходимости сеточного решения равномерно по малому параметру будет почти первого порядка, т.е. как и в случае гладких граничных функций. При доказательстве используется декомпозиция решения и оценки производных входящих в нее функций. Проведенные численные исследования подтверждают теоретический результат. Расчеты проводились с использованием пакета программ MATLAB.

Литература.

1. *Andreev V.B.* Pointwise approximation of corner singularities for singularly perturbed elliptic problems with characteristic layers. *Intern. J. of Numerical Analysis and Modeling*. 7, N 3, 2010. Стр. 416–427.
2. *O’Riordan E., Shishkin G.I.* Parameter uniform numerical methods for singularly perturbed elliptic problems with parabolic boundary layers. *Applied numerical mathematics*. 58, (2008), Стр. 1761-1772.
3. *Kellogg R., Stynes M.* A singularly perturbed convection-diffusion problem in a half-plane. *Applicable Anal.* 85, (2006), Стр. 1471–1485.