ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н.

(Россия, Москва)

В работе рассматриваются системы линейных уравнений специального вида. Для них предлагается итерационный метод решения. Исследуются условия гарантированной сходимости этого метода при любых исходных данных, и находится оптимальный по скорости сходимости набор значений параметров одного из вариантов реализации итераций

В настоящей работе изучаются методы решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

где **A** - действительная квадратная матрица размерности **m x m**, а **x**, **b** - вектора-столбцы из $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, **m** – целое, $\mathbf{m} \geq \mathbf{1}$.

Определение W. Будем говорить, что действительная квадратная матрица **A** удовлетворяет условию **(W),** если она симметричная, а ее собственные значения $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$ принадлежат множеству **W**:

$$\mathbf{W} = \{-1\} \cup [2,4],$$

причем нумерация выбрана так, что

$$\boldsymbol{\lambda}_1(\mathbf{A}) = -1,\ \ 2 \leq \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}) \leq 4,\ 2 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{m} \tag{W}$$

Теорема 1. *Решение линейной системы (1) существует и единственно тогда и только тогда, когда определитель матрицы* ***A*** *отличен от нуля.*

Доказательство. Приведено в [1].

В случае, когда матрицы **A** удовлетворяет условию **(W),** ее определитель отличен от нуля, т.к. он равен произведению собственных значений $\boldsymbol{\lambda_k(A) \in W, 1 \le k \le m}$, которые отличны от нуля.

Определение 1. Метод построения последовательности вектор-столбцов $\mathbf{x^n}$ из $\mathbf{R^m}$ по формуле:

$$\mathbf{x^{n+1} = Bx^n + c, \quad n = 0,1, \dots ,} \tag{2}$$

где **B** – действительная квадратная матрица размерности **m x m**, а **c** - вектор-столбец из $\mathbf{R^m}$, называется методом простой итерации. Вектор-столбец $\mathbf{x^0}$ из $\mathbf{R^m}$ называется начальным значением метода простой итерации, вектор-столбец $\mathbf{x^{n+1}}$ из $\mathbf{R^m}$ называется следующим значением метода простой итерации, а вектор-столбец $\mathbf{x^n}$ из $\mathbf{R^m}$ текущим значением метода простой итерации. Метод простой итерации **(2)** задается начальным значением $\mathbf{x^0}$, матрицей **B** и **c.**

Определение 2. Спектральным радиусом **ρ(B)** действительной квадратной матрицы **B** называется

$$\boldsymbol{\rho(B) = \sup_{1 \le k \le m} |\lambda_k(B)|,}$$

где $\boldsymbol{\lambda_k(B)}$ – собственное значение матрицы **B**.

В случае **(W)** спектральный радиус $\boldsymbol{\rho(B) \le 4}$.

Теорема 2. *Предел последовательности (2) существует для произвольного начального значения* x^0 *из* R^m *тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы, т.е.* $|\rho(B)| < 1$.

Доказательство. Приведено в [2].

Определение 3. Многочленами Чебышева T_n (x) целой степени $n \ge 0$ называются многочлены, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$\mathbf{T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n (x) - T_{n-1}(x).}$$

При $\mathbf{|x| \le 1}$ их также можно задать формулой

$$\mathbf{T_n (x) = \cos(n \cdot \arccos x)}.$$

Лемма 3. *Функция $|T_n(x)|$ является четной функцией x при всех натуральных n. Она ограничена 1 при $|x| \le 1$ и строго монотонно возрастает при $x > 1$.*

Доказательство. Следует из определений многочленов Чебышева, теоремы Лагранжа о конечных приращениях и положительности первой производной по **x** функции $\mathbf{T_n(x)}$, при $\mathbf{x > 1, n > 1}$.

Определение 4. Приведенным многочленом Чебышева на отрезке [a,b] называется многочлен, заданный формулой:

$$T_n([a,b],x) = T_n((2x - (a + b))/(b - a)) / \; T_n(- (a + b)/(b - a)).$$

Теорема 4. Приведенные многочлены Чебышева, построенные по действительной симметричной матрице **A,** чьи собственные значения принадлежат отрезку [2,4], задают сходящийся метод простой итерации (2) при $\mathbf{B = T_n([2,4],A)}$. Приведенные многочлены Чебышева, построенные по матрице **A,** удовлетворяющей условию (W), при $\mathbf{a = -1, b = 4}$ и при $\mathbf{a = 2, b = 4}$, задают расходящийся для некоторого начального приближения $\mathbf{x^0}$ из $\mathbf{R^m}$ метод простой итерации (2) при $\mathbf{B = T_n([a,b],A)}$.

Доказательство. Доказательство сходимости приведено в [2]. Доказательство расходимости следует из цепочки неравенств:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{B}) \ge |\, \mathbf{T_n([-1,4]\,, -1)} \,| = |\, \mathbf{T_n(-1) / T_n(-3/5)} \,| > \mathbf{1},$$

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{B}) \ge |\, \mathbf{T_n([2,4], -1)} \,| = |\, \mathbf{T_n(-4) / T_n(-3)} \,| > \mathbf{1}.$$

Определение 5. Метод простой итерации (2), где B - действительная квадратная матрица размерности m x m, задаваемая формулой

$$\mathbf{B = E + \boldsymbol{\alpha} A + \boldsymbol{\beta} A^2} \tag{3}$$

и **c** вектор-столбец из $\mathbf{R^m}$, задаваемый формулой

$$\mathbf{c = -(\boldsymbol{\alpha} E + \boldsymbol{\beta} A)b}, \tag{4}$$

где **α,β** - вещественные числа, **E** - единичная вещественная квадратная матрица размерности **m x m**, называется двухпараметрическим при $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, и однопараметрическим методом простой итерации при $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

Теорема 5. Пусть предел последовательности двухпараметрического метода простой итерации (2)-(4) существует и равен вектор-столбцу $\mathbf{x^*}$ из $\mathbf{R^m}$, действительное число **(- α/β)** не является собственным значением невырожденной действительной матрицы **A**, тогда $\mathbf{x^*}$ является решением линейной системы (1).

Доказательство. Перейдем к пределу в левой и правой части формулы (2), воспользуясь конечномерностью матрицы **A** и свойствами предела суммы и произведения последовательностей, получим

$$\mathbf{x^* = x^* + (\alpha E + \beta A)(Ax^* - b)}.$$

Матрица $\mathbf{\alpha E + \beta A}$, при $\mathbf{\alpha,\beta \in R}$ невырождена, если **(- α/β)** не является собственным значением матрицы **A.** Следовательно, $\mathbf{x^*}$ решение **(1),** которое существует и единственно, т.к. **A** – невырожденная матрица.

Лемма 6. *Собственные значения матрицы* $\boldsymbol{E + \alpha A + \beta A^2}$, *обозначенные нами как* $\mathbf{\lambda(E + \alpha A + \beta A^2)}$ *выражаются через собственные значения* $\mathbf{\lambda(A) \in R}$ *матрицы* **A,** *удовлетворяющей условию (W)***,** *при* $\mathbf{\alpha,\beta \in R}$ *по формуле*:

$$\mathbf{\lambda(E + \alpha A + \beta A^2) = 1 + \alpha\, \lambda(A) + \beta\, \lambda^2(A).}$$

Доказательство. Собственные вектора матрицы **A** являются собственными векторами для матриц **E** и $\mathbf{A^2}$, а также любой их линейной комбинации. Собственные значения $\mathbf{\lambda(A)}$ действительны, собственные вектора матрицы **A** образуют базис в $\mathbf{R^m}$.

Лемма 7. *Однопараметрический метод простой итерации (2)-(4), построенный по матрице* **A**, *удовлетворяющей условию (W)***,** *расходится при любом действительном* **α** *и для некоторого начального приближения* $\mathbf{x^0}$ *из* $\mathbf{R^m}$.

Доказательство. От противного. Собственные значения $\mathbf{\lambda_k(E+\alpha A)}$ матрицы $\mathbf{E+\alpha A}$, при каждом **k**, удовлетворяют условию

$$\mathbf{\lambda_k(E+\alpha A) = 1 + \alpha\, \lambda_k(A), \text{ при } \lambda_k(A) \in R.}$$

Предположим, что существует действительное число **α**, при котором собственные значения матрицы $\mathbf{E+\alpha A}$ лежат в единичном интервале, т.е.

$$\mathbf{-1 < 1 + \alpha\, \lambda_k(A) < 1 \;\Leftrightarrow\; -2 < \alpha\, \lambda_k(A) < 0.}$$

При $\mathbf{k = 1}$, $\mathbf{\lambda_1(A)= -1}$ неравенство эквивалентно $\mathbf{0 < \alpha < 2}$.
При $2 \le k \le m$, $2 \le \lambda_k(A) \le 4$ имеем неравенство $-2 / \lambda_k(A) < \alpha < 0$.
Из этих неравенств получается $\mathbf{\alpha < 0}$ **и** $\mathbf{\alpha > 0}$.
Полученное противоречие доказывает лемму.

Определение 6. Обозначим:

$$\mathbf{\theta(\alpha,\beta, \lambda) = 1 + \alpha\, \lambda + \beta\, \lambda^2},$$

$$\mathbf{q(\alpha , \beta) = \sup_{\lambda \in W} | \theta(\alpha,\beta, \lambda)| .}$$

Лемма 8. *Спектральный радиус матрицы* $\mathbf{E + \alpha A + \beta A^2}$ *, когда матрица* **A** *удовлетворяет условию (W)***,** *оценивается сверху*:

$$\mathbf{\rho(E + \alpha A + \beta A^2) < q(\alpha , \beta).}$$

Лемма 9. Двухпараметрический метод простой итерации, построенный по матрице **A**, удовлетворяющий условию (W), при $\mathbf{\alpha = 0}$ и $\mathbf{\beta = - 2/17}$ сходится при любом начальном приближении $\mathbf{x^0}$. Существует норма, в которой сходимость оценивается сверху геометрической прогрессией с показателем $\mathbf{q = 15/17}$.

Доказательство. В [2] приведена теорема для оптимального линейного процесса, это подходит для нашего случая с матрицей равной A^2.

Определение 7. Двухпараметрический метод простой итерации, построенный по матрице **A**, удовлетворяющей условию **(W)**, называется оптимальным по скорости, если он соответствует $\mathbf{\alpha_0}$ и $\mathbf{\beta_0}$, при которых:

$$\mathbf{q(\alpha_0 , \beta_0) = \inf_{\alpha,\beta} q(\alpha , \beta).}$$

Теорема 10. Двухпараметрический метод простой итерации, построенный по матрице **A**, удовлетворяющей условию (W), при $\mathbf{\alpha_0 = 1/7}$, $\mathbf{\beta_0 = - 1/7}$, $\mathbf{q(1/7 , - 1/7) = 5/7}$ является оптимальным по скорости.

Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{\alpha_0 = 1/7}$, $\mathbf{\beta_0 = - 1/7}$.

Неравенство $|\theta(1/7\ ,\ -\ 1/7,\ \lambda)| \leq 5/7$ выполнено для λ принадлежащего множеству **W.**

Вершина параболы $\theta(1/7\ ,\ -\ 1/7,\ \lambda)$ лежит в точке $\lambda = 1/2$, вне множества **W,** поэтому максимальное значение модуля достигается при $\lambda \in \partial W$. Предположим, что существуют значения α_1 и β_1, при которых $q(\alpha_1, \beta_1) < 5/7$.

Выпишем соответствующие неравенства при $\lambda = -1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 4$

$$-5/7 < 1 - \alpha_1 + \beta_1 < 5/7,$$

$$-5/7 < 1 + 2\alpha_1 + 4\beta_1 < 5/7,$$

$$-5/7 < 1 + 4\alpha_1 + 16\beta_1 < 5/7.$$

Сложив второе и удвоенное первое неравенство, получим

$$-6/7 < \beta_1 < -1/7.$$

Третье неравенство перепишем в эквивалентное

$$-5/7 < -1 - 4\alpha_1 - 16\beta_1 < 5/7$$

и сложив его с удвоенным вторым, получим

$$-22/7 < -8\beta_1 < 8/7.$$

Получаем противоречие: $\beta_1 < -1/7$ и $\beta_1 > -1/7$ не может быть выполнено одновременно. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00511).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 1.Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, Гл. ред. Физ-Мат. Лит., 1971, 432 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Учебное пособие. М., Наука, Гл. ред. Физ-Мат. Лит., 1987, 600 с.

Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н. — МКО — 2007, т. 2, стр. 111–117
Sorokin P. N., Chensova N. N. — MCE — 2007, v. 2, p. 111–117

ABOUT OPTIMAL RATE OF CONVERGENCE OF CERTAIN SEQUENCE

Sorokin P. N., Chensova N. N.

Linear equations of special types are investigated. Its iteration solution is proposed. Conditions for the method convergence are analyzed. Optimal set of parameters by the rate of convergence for the one of the algorithm realization is founded.