

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КВАДРАТИЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Никольский И. М., Куркина Е. С.

(Россия, Москва)

*В работе исследуются затухающие и неограниченные решения уравнения теплопроводности с источником специального вида. Построено семейство точных решений вида  $p(t) + q(t)\cos(x/\sqrt{2})$ , где  $p(t)$  и  $q(t)$  удовлетворяют некоторой динамической системе. Проведены численные и аналитические исследования задачи Коши.*

**Введение.** Многие процессы, изучаемые в самых разных отраслях знания, описываются квазилинейными параболическими уравнениями второго порядка. Конструктивными исследованиями пространственно-временной структуры решений таких уравнений занимались многие учёные. Большой вклад в развитие математического аппарата таких исследований внесли российские учёные А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов и другие.

Особое место в теории нелинейных уравнений занимает круг исследований неограниченных решений (режимов с обострением). Такие решения на некотором множестве (иногда во всём пространстве или в одной точке) обращаются в бесконечность за *конечное* время.

В данной статье исследуется нелинейное уравнение теплопроводности с источником специального вида. Весьма похожее уравнение рассматривалось в [1]; новизна нашей задачи состоит в наличии постоянного слагаемого в источнике, а также в рассмотрении начальной функции в виде возмущения *ненулевого* фона.

Интерес к выбранному виду уравнения обусловлен его возможными приложениями, в частности, к моделированию вспышек, наблюдаемых в короне Солнца (см. [2]).

**Постановка задачи.** Рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \geq u_0 \quad (2)$$

где  $u_1 > u_0 > 0$ . Задача ставится в области  $(0, T) \times R$ , где  $T$  – некая положительная константа. Функция  $f(x)$  предполагается непрерывной и ограниченной на числовой оси.

Нас будут интересовать классические решения задачи (1)-(2). Под *классическими* понимаются решения  $u(x, t)$ , обладающие следующими свойствами:  $u(x, t) \in C_{tx}^{1,2}((0, T) \times R) \cap C([0, T] \times R)$ .

**Точные решения уравнения (1).** Простой подстановкой можно убедиться, что уравнение допускает семейство решений

вида  $u(x, t) = p(t) + q(t) \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$ . При этом коэффициенты удовлетворяют динамической системе

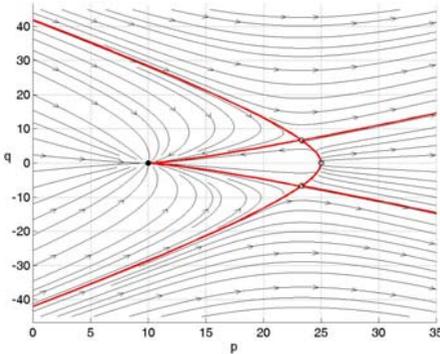
$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{1}{2}q^2 + p^2 + u_0u_1 - (u_0 + u_1)p \\ \dot{q} = \frac{3}{2}pq - (u_0 + u_1)q \end{cases} \quad (3)$$

Фазовый портрет системы (3) для случая  $u_1 > 2u_0$  (конкретные значения  $u_0 = 10$ ,  $u_1 = 25$ ) представлен на рис.1. Особые точки отмечены кружочками, жирными линиями нарисованы сепаратрисы. При  $u_1 \leq 2u_0$  у системы имеется лишь две особые точки – устойчивый узел  $(u_0, 0)$  и седло  $(u_1, 0)$ .

Исследуем поведение решений системы.

При  $p(0) = p_0 > u_1$  функция  $p(t)$  обращается в (плюс) бесконечность за конечное время  $T_0$ , которое оценивается сверху

$$\text{числом } t_*. \quad t_* = \frac{1}{(u_1 - u_0)} \ln \left( -\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{u_1 - u_0} \right), \quad C = \frac{u_1 - z_0}{(z_0 - u_0)(u_1 - u_0)}.$$



**Рис.1.** Фазовый портрет системы (3)

Можно показать, что при  $p_0 > u_0 + u_1$  функция  $q(t)$  также развивается в режиме с обострением, причём моменты обострения  $p(t)$  и  $q(t)$  совпадают. Отношение  $p(t)/q(t)$  стремится к единице при  $t \rightarrow T_0$ . Изучим поведение не-ограниченных решений семейства при приближении времени к моменту обострения. Для этого требуется каким-то образом избавиться от зависимости от времени в решении. В этих целях используются разного рода *обработки* решений (см.[3]). Мы будем использовать такую обработку:

$$\Theta(u(x, t), A) = A \frac{u(x, t)}{\|u(x, t) - \|u(x, t)\| \|}.$$

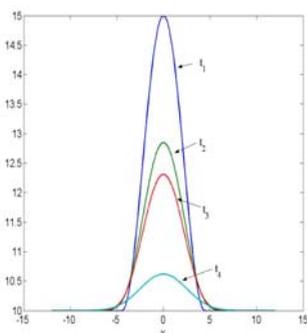
Как было сказано выше, при  $p_0 > u_0 + u_1$  предел отношения  $p(t)/q(t)$  стремится к 1, следовательно

$$\left\| \Theta \left( u(x, t), \frac{4}{3} \right) - \theta_s(x) \right\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T_0^-,$$

где  $\theta_s(x) = \frac{2}{3} \left( 1 + \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$ .

### Затухающие и неограниченные решения задачи Коши.

Пусть начальная функция  $f(x)$  в задаче (1)-(2) имеет вид финитного возмущения фона  $u_0$ . Интуитивно понятно, что для того, чтобы соответствующее решение развивалось режиме с обострением, необходимо, чтоб это возмущение было бы достаточно велико.



**Рис.2.** Профили затухающего решения

Действительно, из теоремы сравнения следует, что если  $\sup_x f(x) < u_1$ , то  $\sup_x u(t, x) \rightarrow u_0$  (разумеется,  $u(t, x) \geq u_0 \quad \forall t, \forall x$ ).

В качестве решения, которое будет ограничивать  $u(t, x)$  сверху можно взять пространственно-однородное решение  $U(t)$ :  $\sup_x f(x) \leq U(0) \leq u_1$ . На рис. 2 представлены профили одного из затухающих решений задачи (1)-(2).

Существуют нижние решения нашего уравнения, развивающиеся в режиме с обострением. Они удовлетворяют уравнению

$$v_t = (vv_x)_x + v^2 - (u_0 + u_1)v \quad (4)$$

и их легко получить в явном виде. Следовательно, если  $f'(x) \geq v(x,0) \quad \forall x$ , то решение уравнения (1)  $u(x,t)$  будет неограниченным (см. рис. 3).

Доказательства всех утверждений этого и предыдущего пунктов приведены в [4].

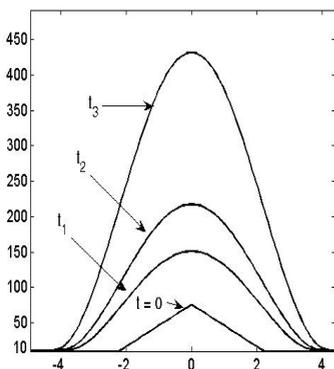


Рис.3. Профили решения, растущего в режиме с обострением

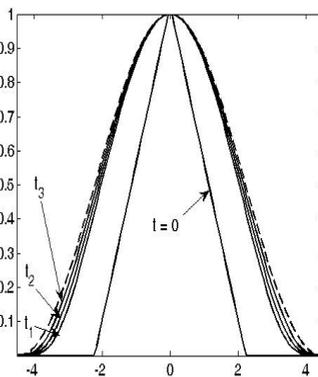


Рис.4. Автомодельная обработка

**Численное исследование задачи Коши.** Расчёты проводились с помощью пакета Matlab 7.0. Вычисления велись на подробных сетках (400 – 1800 узлов по  $x$ , динамический выбор шага  $t$ ). Контроль над достоверностью вычисляемого решения осуществлялся с помощью сгущения сетки по  $x$ . Константа  $u_0$  была положена равной 10,  $u_1 = 22$ . Часть результатов расчётов уже была приведена на рисунках выше. В этом пункте описаны те свойства неограниченных решений задачи (1)-(2), которые доказаны пока лишь численно.

Вид профилей решения на рис. 3 говорит о наличии явления *строгой локализации* (т.е.  $u(t,x) = u_0$  всюду вне некоторого отрезка  $(a,b)$  при  $t \in (0,T)$ , где  $T$  - время обострения  $u(t,x)$ ).

Отметим сходство с поведением решения хорошо изученного в литературе уравнения

$$u_t = \left(u^\sigma u_x\right)_x + u^\beta \quad (5)$$

при  $\sigma = \sigma + 1$  (см., например, [3]).

На рис.4 показана так называемая *автомодельная* обработка профилей. *Автомодельной обработкой* профиля решения  $u(x, t_n)$  в момент времени  $t_n$  будем называть функцию

$$g(x) = \frac{1}{\max_x u(x, t_n) - u_0} \cdot (u(x, t_n) - u_0). \text{ Пользуясь такой обработкой}$$

профилей решения, мы легко можем отследить его асимптотическое поведение. На рис.4 видно, что обработанные профили с течением времени меняются всё меньше и меньше. Пунктирной линией, к которой приближаются обработанные профили, показана функция  $g_s(x) = \cos^2(x/\sqrt{2})$ , которая является *автомодельной* обработкой точного решения  $u_s(x, t)$  уравнения

$$u_t = \left(u u_x\right)_x + u^2,$$

(т.е. уравнения (5) при  $\sigma = 1$ ). В какой-то момент обработанные профили сливаются с пунктирной линией и практически перестают меняться. Таким образом, при приближении времени к моменту обострения, обработка неограниченных решений имеет профиль, близкий к  $g_s(x)$

Решение на рис. 3 развивается в S-режиме, т.е. рост в режиме с обострением происходит на некотором ограниченном множестве  $w_L$ . Существуют также LS-режим, когда решение обрастает в бесконечность в одной точке ( $\text{mes } w_L = 0$ ), а полуширина решения сокращается, а также HS-режим, когда решение неограниченно возрастает на всей прямой.

Численные исследования показывают, что путём изменения степени положительного члена в источнике нашего уравнения, мы

можем получить неограниченные решения, развивающиеся в LS или HS-режимах.

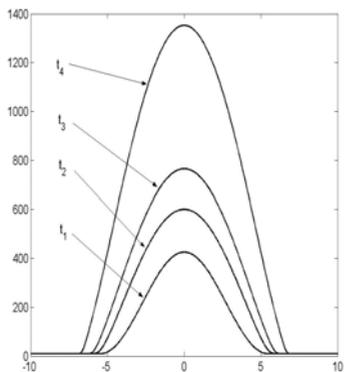


Рис. 5. HS – режим

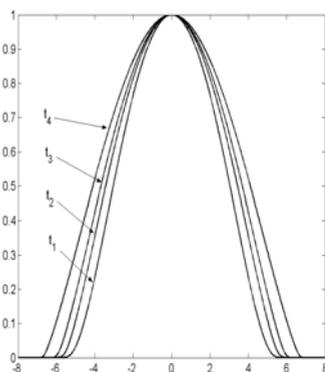


Рис. 6. Автомодельная обработка профилей HS – режима

Рассмотрим уравнения

$$u_t = (uu_x)_x + u^{1.8} - (u_0 + u_1)u + u_0u_1 \quad (6)$$

$$u_t = (uu_x)_x + u^{2.5} - (u_0 + u_1)u + u_0u_1 \quad (7)$$

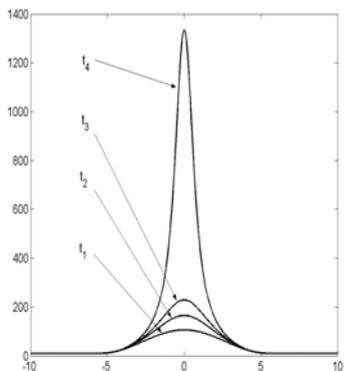


Рис. 7. LS – режим

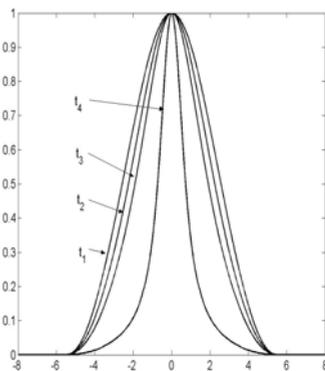


Рис. 8. Автомодельная обработка профилей LS – режима

При достаточно большой амплитуде начального возмущения решение уравнения (6) развивается в режиме с обострением, при этом фундаментальная длина (т.е.  $\text{mes } w_L$ ) увеличивается (рис.5). Это свидетельствует о наличии HS режима.

На рис.7 представлены профили неограниченного решения уравнения (7). На рис.8 показана их автоматическая обработка. Легко видеть, что полуширина решения сокращается, т.е. имеет место LS-режим.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. // Итоги науки и техники. Сер. "Современные проблемы математики. Новейшие достижения". Т. 28, 1987. С. 95–205.
2. Ковалёв В.А., Чернов Г.П., Ханаока И. Мелкомасштабные высокотемпературные структуры во вспышечной области. // Письма в астрономический журнал. 2001. Т. 27, № 4. С. 310–320.
3. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. / Самарский А.А. [и др.]; ред. С.А. Посашков— М.: Наука, 1987. — 480 с.
4. Куркина Е.С., Никольский И.М. Исследование нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником. // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2006.

## THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

**Nikolsky I. M., Kurkina E. S.**

(Russia, Moscow)

*We study extinct and unbounded solutions of a nonlinear heat equation with special source. A family of analytic solutions of the form  $p(t) + q(t)\cos(x/\sqrt{2})$ , where  $p(t)$  and  $q(t)$  satisfy some dynamic system, has been built. Numerical and analytic investigation of the Cauchy problem for our equation has been performed.*