

О ТРЁХ СЛУЧАЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИ ЯВНО ЗАДАННЫХ ОБЩИХ ИНТЕГРАЛОВ ВОЛЬТЕРРОВСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Апонин Ю.М., Апонина Е.А.

Институт математических проблем биологии РАН
Россия, 142290, г. Пущино, ул. Институтская 4,
Тел.: (4967) 318539, E-mail: yma@impb.psn.ru

Рассматривается вольтерровская система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx/dt = x(q_1 - a_{11}x + a_{12}y) \\ dy/dt = y(q_2 + a_{21}x - a_{22}y) \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}_{++}. \quad (1)$$

Здесь t – вещественное время, $q_1, q_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – вещественные параметры, удовлетворяющие условиям невырожденности системы (1):

$$a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}, \quad q_1^2 + q_2^2 \neq 0, \quad (2)$$

$\mathbb{R}_{++} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ – множество положительных действительных чисел.

В некоторых случаях предполагается также, что выполнены следующие условия глобальной устойчивости одномерных подсистем на инвариантных многообразиях $x = 0$ и $y = 0$ системы (1):

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0. \quad (3)$$

При построении глобальных фазовых портретов системы (1) важную роль играет вычисление общих интегралов этой системы. В настоящей работе обсуждаются условия на параметры $q_1, q_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, при которых такие интегралы находятся аналитически в явном виде. Хорошо известны два случая таких условий.

Первый случай был известен В. Вольтерра ещё в 1924 году. Этот случай определяется двумя условиями типа равенства: $a_{11} = 0, a_{22} = 0$. При этих условиях в системе (1) \wedge (2) находится явно заданный общий интеграл, который использовался В. Вольтерра при проведении полного качественного исследования классической модели популяционной динамики «хищник – жертва».

Второй случай был указан в 1942 году Н.Н.Баутиным при исследовании системы (1) \wedge (2) \wedge (3), которая встречается в теории механических систем с гироскопическими силами. Этот случай определяется только одним условием типа равенства:

$$(a_{11} + a_{21})a_{22}q_1 + (a_{22} + a_{12})a_{11}q_2 = 0.$$

В настоящей работе показано, что при условии $q_1 = q_2$ система (1) \wedge (2) \wedge (3) также имеет явно заданный общий интеграл, который, в отличие от интегралов В.Вольтерра и Н.Н.Баутина, зависит не только от фазовых переменных x, y , но и от времени t . Этот интеграл вычислен аналитически в явном виде и позволил провести полное качественное исследование системы (1) \wedge (2) \wedge (3) в однородных координатах x_1, x_2, x_3 (выражения декартовых координат через однородные: $x = x_1/x_3, y = x_2/x_3$) на действительной проективной плоскости.