ИНТЕРВАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Левин В.И.
Пензенский государственный технологический университет, Россия,
440039, тел. (8412) 670263, факс (8412) 496086, e-mail: vilevin@mail.ru

Будем использовать алгебру интервальных чисел. Операнды в ней – замкнутые вещественные интервалы $\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] \equiv \{a \,|\, a_1 \le a \le a_2\}$. Операции $\circ$ над $\tilde{a} = [a_1, a_2], \tilde{b} = [b_1, b_2]$ введем как теоретико-множественные обобщения операций над вещественными числами a, b: $\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \circ b \,|\, a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}$. Т.е. можно ввести операции $+, -, \cdot, /$ над интервалами. Интервальная функция – однозначное отображение множества $\{\tilde{x}\}, \tilde{x} = [x_1, x_2]$ на такого же типа множество $\{\tilde{y}\}, \tilde{y} = [y_1, y_2]$: $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$, где $\tilde{x}$ – интервальная независимая переменная, $\tilde{y}$ – интервальная зависимая переменная, $\tilde{f}$ – интервальная функция. Говорим, что $\tilde{x}$ неограниченно приближается к предельному интервалу $\tilde{x}_0 = [x_{01}, x_{02}]$, если x_1 неограниченно приближается к x_{01}, x_2 к x_{02}. Символически: $(\tilde{x} \to \tilde{x}_0) \equiv (x_1 \to x_{01}, x_2 \to x_{02}) \equiv (\lim x_1 = x_{01}, \lim x_2 = x_{02})$. Аналогично $\tilde{x}$ зависимая переменная $\tilde{y}$ интервальной функции может неограниченно приближаться к предельному интервалу $\tilde{y}_0 = [y_{01}, y_{02}]$, т.е. $(\tilde{y} \to \tilde{y}_0) \equiv (y_1 \to y_{01}, y_2 \to y_{02})$. Если неограниченное приближение $\tilde{y}$ к $\tilde{y}_0$ вызвано неограниченным приближением $\tilde{x}$ к $\tilde{x}_0$, говорим, что предел функции при $x \to \tilde{x}_0$ есть $\tilde{y}_0$, т.е. $\lim\limits_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{y} = \tilde{y}_0$ или $\lim\limits_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{y}_0$. Если интервальная функция непрерывна, т.е. нижняя и верхняя границы $\tilde{y}$ – непрерывные функции нижней и верхней границ $\tilde{x}$, то $\lim\limits_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Рассмотрим непрерывную интервальную функцию $\tilde{f}$. Зафиксируем значение $\tilde{x}_0 = [x_{01}, x_{02}]$ независимой переменной. Этому значению, в силу непрерывности функции $\tilde{f}$, соответствует фиксированное значение $\tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Приращения независимой и зависимой переменных относительно их фиксированных значений: $\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_0, \Delta\tilde{y} = \tilde{y} - \tilde{y}_0 = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Составим отношение второго приращения к первому $\Delta\tilde{y}/\Delta\tilde{x} = (\tilde{y} - \tilde{y}_0)/(\tilde{x} - \tilde{x}_0) = (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(\tilde{x}_0))/(\tilde{x} - \tilde{x}_0)$. Возьмем его предел при неограниченном приближении $\tilde{x}$ к ее фиксированному значению $\tilde{x}_0$: $\lim\limits_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} \Delta\tilde{y} / \Delta\tilde{x}$. Этот предел мы будем называть интервальной производной и обозначать $\tilde{y}'_{\tilde{x}_0}$ или $\tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x})$.

Теорема 1. Для того чтобы в точке $\tilde{x}_0$ существовала интервальная производная от интервальной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки, включая ее саму, значения переменной $\tilde{x}$ были невырожденными интервалами.

Теорема 2. Интервальная производная от непрерывной интервальной функции может быть выражена в конечном виде: $\tilde{y}'_{\tilde{x}_0} \equiv \tilde{f}'_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) = (\tilde{f}(\tilde{x}_0) - \tilde{f}(\tilde{x}_0))/(\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0)$.

Производная $\tilde{f}'_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ от интервальной функции $\tilde{f}(\tilde{x})$ также является интервальной функцией. Это позволяет продолжить процесс, получив сначала вторую производную $\tilde{f}''_{\tilde{x}}(\tilde{x})$, затем третью производную $\tilde{f}'''_{\tilde{x}}(\tilde{x})$ и т.д.