ОБ ОДНОМ НОВОМ ПОДХОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Зеленков Г.А., Зубов И. Н., Лопатин М.С.

Морская государственная академия им. Ф.Ф. Ушакова, E-mail: mathshell@mail.ru

Известно, что матричный многочлен от матрицы A, имеющий коэффициенты совпадающие с коэффициентами характеристического многочлена этой матрицы, тождественно равен нулевой матрице.

Часто возникает обратная задача, в каком случае коэффициенты матричного многочлена аннулирующего матрицу A являются коэффициентами характеристического многочлена этой матрицы. Справедлива теорема.

Теорема 1. Пусть матрица A с вещественными элементами размера $(n \times n)$ – неособенная и справедливо матричное тождество

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \ldots + p_1 A + p_0 E \equiv 0, \; p_0 = \det A \tag{1}$$

тогда величины $p_{n-1}, \ldots, p_1, p_0$ являются коэффициентами характеристического многочлена матрицы А, т.е.

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0) \tag{2}$$

Метод А.Н. Крылова построения характеристического многочлена, вообще говоря, дает делители минимального многочлена и в некоторых случаях не пригоден. Мы предлагаем другой подход, основой которого являются две теоремы ниже.

Теорема 2. (регулярный случай).

Если матрица A - неособенная ($\det A \neq 0$), то коэффициенты характеристического многочлена этой матрицы однозначно определяются как решения системы линейных уравнений.

$$A_k^n + p_{n-1}A_k^{n-1} + \ldots + p_0 E_k = 0, k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где A_k^m - *kый* столбец матрицы A^m.

Теорема 3. (нерегулярный случай).

Если матрица B - особенная, то коэффициенты ее характеристического многочлена $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_1$ можно построить путем решения системы линейных уравнений (3) при $A = B + \mu E$, $\tilde{p}_0 = \det(B + \mu E)$ и преобразования этого решения $\tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1}, \ldots, \tilde{p}_0$ с помощью рекуррентных формул в величины $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_1$.

$$\tilde{p}_{n-1} + \mu C_n^1 = p_{n-1}, \quad C_n^2\mu^2 + C_{n-1}^1\mu\tilde{p}_{n-1} + \tilde{p}_{n-2} = p_{n-2}, \ldots, C_n^{n-1}\mu^{n-1} + C_{n-1}^{n-2}\mu^{n-2}\tilde{p}_{n-1} + \ldots + C_2^1\mu\tilde{p}_2 + \tilde{p}_1 = p_1, p_0 = \det(B) = 0, p_{n-1} = SpB$$

Для поиска решений линейных систем большего порядка желательно использовать метод И.В. Зубова, заключающийся в сведении решения системы линейных алгебраических уравнений к численному решению системы линейных дифференциальных уравнений, решение которой асимптотически стремится к искомому решению системы линейных уравнений. Этот метод позволяет получить искомое решение с любой точностью, и устойчив к ошибкам округления.