О РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Зубов Н.В.[1], Зеленков Г.А.[2], Черноглазов Д.Г.[2]

[1]Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына,
[2]Морская государственная академия им. Ф.Ф. Ушакова, E-mail: mathshell@mail.ru

Определение 1. Полином степени n с вещественными или комплексными коэффициентами $\varphi(S) = A_0 + A_1 S + \ldots + A_n S^n$
не имеющий нулевых и чисто мнимых корней принадлежит классу (n,k)-эквивалентности, если k его корней с учетом кратностей лежат в правой части комплексной плоскости (справа от мнимой оси).

Очевидно, для таких полиномов $A_0 \neq 0, A_n \neq 0$. В частности, если $k = 0$, то полином $\varphi(S)$ называется устойчивым.

Определение 2. Семейство Ф полиномов степени n с комплексными коэффициентами

$$\Phi = \left\{ \varphi(S) = A_0 + A_1 S + \ldots A_n S^n, A_i = a_i + jb_i, a_i \in \left[\underline{a}_i, \overline{a}_i\right], b_i \in \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right], \max(\underline{a}_n \overline{a}_n, \underline{b}_n \overline{b}_n) > 0, i = \overline{0,n} \right\}$$

называется комплексным интервальным полиномом.

Будем говорить, что комплексный интервальный полином Ф принадлежит классу (n,k)-эквивалентности, если каждый полином $\varphi(S)$ из Ф находится в этом классе.

Рассмотрим годограф $\varphi(j\omega)$ полинома семейства Ф:

$$\begin{array}{ll} \varphi(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega), -\infty < \omega < +\infty, & \left\{ \begin{array}{l} g(\omega) = a_0 - b_1\omega - a_2\omega^2 + b_3\omega^3 + a_4\omega^4 - \ldots \\ h(\omega) = b_0 + a_1\omega - b_2\omega^2 - a_3\omega^3 + b_4\omega^4 + \ldots. \end{array} \right. \\ g(\omega) = \mathrm{Re}\,\varphi(j\omega), h(\omega) = \mathrm{Im}\,\varphi(j\omega), & \end{array}$$

Определение 4. Назовем угловыми полиномами восемь полиномов вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{11}(S) = \underline{g}_1(-jS) + j\underline{h}_1(-jS), \\ \varphi_{21}(S) = \overline{g}_1(-jS) + j\underline{h}_1(-jS), \\ \varphi_{22}(S) = \overline{g}_1(-jS) + j\overline{h}_1(-jS), \\ \varphi_{12}(S) = \underline{g}_1(-jS) + j\overline{h}_1(-jS); \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{33}(S) = \underline{g}_2(-jS) + j\underline{h}_2(-jS), \\ \varphi_{43}(S) = \overline{g}_2(-jS) + j\underline{h}_2(-jS), \\ \varphi_{34}(S) = \underline{g}_2(-jS) + j\overline{h}_2(-jS), \\ \varphi_{44}(S) = \overline{g}_2(-jS) + j\overline{h}_2(-jS). \end{array} \right.$$

Теорема 3. Семейство полиномов Ф принадлежит классу (n,k)-эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется два следующих условия.

1.1. Либо все восемь угловых полиномов находятся в классе (n, k) – эквивалентности.

1.2. Либо один из восьми угловых полиномов находится в классе (n, k) – эквивалентности, а остальные семь угловых полиномов не имеют нулевых и чисто мнимых корней.

1.3. Либо все восемь угловых полиномов не имеют нулевых и чисто мнимых корней и имеется в семействе Ф хотя бы один полином из класса (n, k) – эквивалентности.

2. При $\omega \geq 0$: если $\underline{g}_1(\omega)\overline{g}_1(\omega) = 0$, то $\underline{h}_1(\omega)\overline{h}_1(\omega) > 0$; если $\underline{h}_1(\omega)\overline{h}_1(\omega) = 0$, то $\underline{g}_1(\omega)\overline{g}_1(\omega) > 0$.

При $\omega \leq 0$: если $\underline{g}_2(\omega)\overline{g}_2(\omega) = 0$, то $\underline{h}_2(\omega)\overline{h}_2(\omega) > 0$; если $\underline{h}_2(\omega)\overline{h}_2(\omega) = 0$, то $\underline{g}_2(\omega)\overline{g}_2(\omega) > 0$.

При k = 0 получим теоремы об устойчивости комплексного интервального полинома. Для условия 1.1 это т. Харитонова и в этом случае условие 2 не требуется проверять.