ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ СО СПЕКТРОМ ИЗ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОТРЕЗКА*

П.Н.Сорокин [1], Н.Н.Ченцова [2]

[1] НИИ системных исследований РАН,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Механико-математический ф-т, каф. Математического анализа,
Россия, 127486, Москва, ул. Дегунинская, д. 13, кв. 84.
Тел.: (495)487-48-03, e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

[2] Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Механико-математический ф-т, каф. Вычислительной математики,
Россия , 119296, Москва, Ленинский пр-т, д. 69, кв. 258,
Тел.: (499)134-44-68, e-mail: chensova@mech.math.msu.su

Изучаются методы решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{Ax = b}, \qquad (1)$$

где **A** - действительная квадратная матрица размерности $\mathbf{m \times m}$, **m** – целое, $\mathbf{m \geq 1}$, **x**, **b** - вектора-столбцы из $\mathbf{R^m}$.

Определение 1. Будем говорить, что матрица **A** удовлетворяет условию **(W)**, если все собственные значения $\boldsymbol{\lambda_k(A)}$ матрицы **A** – действительные, некратные и принадлежат множеству $\mathbf{W = \{-s\} \cup [\mu,M],\ 0 < s,\ 0 < \mu < M}$.

Теорема 1. Решение линейной системы **(1)**, если матрица **A** удовлетворяет условию **(W)**, существует и единственно.

Определение 2. Двухпараметрическим методом простой итерации с параметрами $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ называется метод построения последовательности $\mathbf{x^n}$ вектор-столбцов из $\mathbf{R^m}$ по формуле:

$$\mathbf{x^{n+1} = (E+\alpha A+\beta A^2)\, x^n - (\alpha E+\beta A)b}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ – действительные числа отличные от нуля, **E** – единичная матрица.

Положим $\boldsymbol{\theta(\alpha,\beta,\lambda) = 1 + \alpha\, \lambda(A) + \beta\, \lambda^2(A)}$, $\mathbf{q(\alpha,\beta) = sup_{\lambda\in W} |\theta(\alpha,\beta,\lambda)|}$.

Теорема 2. Если матрица **A** удовлетворяет условию **(W)** и $\mathbf{q(\alpha,\beta) < 1}$, то двухпараметрический метод простой итерации сходится к решению линейной системы **(1)**.

Определение 3. Сходящийся двухпараметрический метод простой итерации **(2)** с параметрами $\boldsymbol{\alpha_0, \beta_0}$ называется оптимальным, если $\mathbf{q(\alpha_0 , \beta_0) = inf_{\alpha,\beta}\, q(\alpha , \beta)}$, где $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ – действительные числа, отличные от нуля.

Теорема 3. Если матрица А удовлетворяет условию **(W),** то двухпараметрический метод простой итерации **(2)** с $\boldsymbol{\beta_0 = - 2/(\mu s+Ms-\mu M+M^2)}$, $\boldsymbol{\alpha_0 = (s-\mu)\beta_0}$ сходится к решению системы **(1)** и является оптимальным $\boldsymbol{q(\alpha_0 , \beta_0) = 1+\beta_0 s\, \mu}$.

Замечание. Для $\mathbf{s = 1, \mu = 2, M = 4}$, имеем $\boldsymbol{\alpha_0 = 1/7, \beta_0 = - 1/7, q(\alpha_0 , \beta_0) = 5/7}$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00511).