СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Филатова Т.А.

Московский физико-технический институт, ф-т Нанотехнологий и информатики, каф. Математики,
Россия, 111625, г. Москва, ул. Татьяны Макаровой 8, кв.15,
Тел.: 8-903-210-48-88,
E-mail: tatyana.filatova@gmail.com

Общая постановка данной задачи состоит в нахождении собственных значений (спектра) оператора

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \sum_i \alpha_i \delta(x - x_i)$$

на гладкой поверхности M, $\dim M \le 3$, в квазиклассическом пределе $h \to 0$. Рассматривается случай $\dim M = 1$ и задача на спектр следующего оператора

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \alpha\delta(x - x_0)$$

в пределе $h \to 0$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1: Пусть $V(x) \to \infty$, при $|x| \to \infty$, и пусть существует число E_0, т.ч. при различных значениях параметра α оно удовлетворяет $\operatorname{mod} O(h)$ следующим уравнениям:

$$\left[\begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_2} \sqrt{2(E - V(x))}dx = \pi h(n + \frac{1}{4}), \\ \int_{x_1}^{x_0} \sqrt{2(E - V(x))}dx = \pi h(k + \frac{3}{4}), \quad \alpha = O(1); \end{array}\right.$$

$$\sin(\frac{1}{2h}\oint_{\Gamma:\frac{p^2}{2}+V(x)=E} \sqrt{2(E-V(x))}dx + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\alpha_0}{p(x_0)}(\cos(\frac{1}{2h}\oint_{\Gamma:\frac{p^2}{2}+V(x)=E} \sqrt{2(E-V(x))}dx + \frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{1}{2h}(\sigma_2 - \sigma_1)), \quad \alpha = O(h);$$

$$\oint_{\Gamma:\frac{p^2}{2}+V(x)=E} \sqrt{2(E - V(x))}dx = 2\pi h(n + \frac{1}{2}), \ n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = O(h^2).$$

Тогда $|E - E_0| = o(h^2)$, где E − точка дискретного спектра $\hat{H}$.

Теорема 2: Пусть $V(x) \to 0,$ при $|x| \to \infty$, и пусть $E > V(x)$, тогда спектр оператора $\hat{H}$ непрерывный, и коэффициенты отражения (R) и прохождения (T) имеют следующий порядок при различных значениях α :

$\alpha = O(1)$: $R = 1 + O(h),\ T = O(h)$;

$\alpha = O(h)$: $R, T = O(1)$;

$\alpha = O(h^2)$: $R = O(h),\ T = 1 + O(h)$.