НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

Гордеева И.А.

Владимирский государственный педагогический университет,
Россия, 600024, г. Владимир, пр. Строителей, 11, igordeeva@list.ru

Рассмотрим n-мерное (псевдо)риманово многообразие M с метрическим тензором g и связностью Леви-Чивита ∇. Зададим на M линейную связность $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S такой, что $\overline{\nabla} g = 0$. Тензор кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$, называемой несимметрической метрической связностью, удовлетворяет условию (см. [1], стр. 80)

$$\overline{R}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} + \nabla_i T_{kj}{}^{l} - \nabla_j T_{ki}{}^{l} + T_{mi}{}^{l} T_{kj}{}^{m} - T_{mj}{}^{l} T_{ki}{}^{m}, \qquad (1)$$

где R тензор кривизны связности Леви-Чивита ∇ и T – тензор деформации связности Леви-Чивита ∇ в связность $\overline{\nabla}$.

Используя метрический тензор опустим верхний индекс у тензора кривизны, т.е. $\overline{R}_{ijkl} = g_{pl}\overline{R}_{ijk}{}^{p}$. Тогда, как это последует из формулы (1), тензор кривизны в каждой точке $x \in M$ $\overline{R}_x \in \Lambda^2(T_x^*M) \otimes \Lambda^2(T_x^*M)$. Под действием отображения Бьянки (см. [2], стр. 69) вида $B(\overline{R}_{ijkl}) = \frac{1}{3}(\overline{R}_{ijkl} + \overline{R}_{jkil} + \overline{R}_{kijl})$ пространство $\Lambda^2(T_x^*M) \otimes \Lambda^2(T_x^*M)$ разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств

$$\Lambda^2(T_x^*M) \otimes \Lambda^2(T_x^*M) = \Lambda^4(T_x^*M) \oplus KerB. \qquad (2)$$

Компоненты ортогонального разложения описывает

Лемма 1. *Если для любой точки* $x \in M$

1) $\overline{R}_x \in \Lambda^4(T_x^*M)$, *то* $\overline{R}_{ijkl} = 2\overline{\nabla}_{[i} S_{jk]l} - 4 S_{[ij}{}^{p} S_{k]pl}$;

2) $\overline{R}_x \in KerB$, *то* $\overline{\nabla}_{[i} S_{jk]l} = 2 S_{[ij}{}^{p} S_{k]pl}$;

3) $\overline{R}_x = 0$, *тогда* $g_{ij} = c_{ij}\varphi_i \varphi_j$ *для* $c_{ij} = const$ *и* $\varphi_i = grad\varphi$, *где* $\varphi : M \to$ **R.**

Пусть связность $\overline{\nabla}$ будет *полусимметрической* (см [4]), которая характеризуется следующим строением тензора кривизны $S_{ij}{}^{k} = (n-1)^{-1}(\delta_i^k s_j - \delta_j^k s_i)$, где $s_i = S_{ij}{}^{j}$.

Лемма 2. *Пусть связность* $\overline{\nabla}$ *– полусимметрическая и в любой точке* $x \in M$

1) $\overline{R}_x \in \Lambda^4(T_x^*M)$, *тогда* $\overline{R}_{ijkl} = 2(n-1)^{-1}\overline{\nabla}_{[i} S_{jk]l}$;

2) $\overline{R}_x \in KerB$, *тогда* $\overline{\nabla}_{[i} S_{jk]l} = 0$.

Литература

1. *Яно К.* Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. – 152 с.
2. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. В 2-х т. Т. I. М.: Мир, 1990. – 318 с.
3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности.- М.: Ленинград, 1950. – 464 с.
4. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Rev. Roum. Math. Pures Appl. – 1970. Vol. 15. – P. 1579-1586.