ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Мустафаев А.П., Каратаева Д.С.

Государственный Университет им. Шакарима г.Семей
Факультет информационно - коммуникационных технологии, кафедра Высшей математики, Казахстан, 071412, Восточно-Казахстанская область, г. Семей, Тел.: 8 (722) 235 39 29, факс: 8 (722) 235 94 65, E-mail: abdikadi@mail.ru

Многие задачи физики и техники приводят к уравнениям в частных производных и в частности линейным дифференциальным уравнениям различного порядка (задачи о малых колебаниях струн и стержней, задачи теплопроводности, стационарных тепловых состояний, задачи потенциального движения несжимаемой жидкости и др.). Наряду с общими методами, применяемыми, при решении упомянутых уравнении для каждого типа уравнения существуют, и некоторые специфические методы. В этой работе мы с помощью введения новых переменных, связанных с различными комбинациями характеристик, находим общие решения биволнового уравнения в явном виде.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xxxx} - 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0 \qquad (1)$$

Преобразуем уравнения (1) к новым переменным, положив

$$\xi = x - y,\ \eta = x + y \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = 0 \qquad (3)$$

Интегрируя уравнение (3) получим

$$u(\xi,\eta) = \xi\varphi(\eta) + \varphi_1(\eta) + \eta\psi(\xi) + \psi_1(\xi) \qquad (4)$$

В старых переменных ***x, y*** общее решение уравнения принимает вид

$$u(x,y) = (x-y)\varphi(x+y) + \varphi_1(x+y) + (x+y)\psi_1(x-y) + \psi(x-y) \qquad (5)$$

Где $\varphi(x,y)$, $\varphi_1(x,y)$, $\psi(x,y)$, $\psi_1(x,y)$ производные функции своих аргументов

Чтобы определить эти функции в явном виде, надо задать дополнительные условия и, при этом, она сводится к системам дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями.

Например, с помощью замены $z = x^2 - y^2$ (6)

Уравнения (1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$z^2 u_{zzzz} + 4z u_{zzz} + 2u_{zz} = 0 \qquad (7)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$u(z) = c_1 z \ln|z| + c_2 \ln|z| + c_3 z + c_4 \qquad (8)$$

Переходя, к старым переменным ***x*** и ***y*** общее решение биволнового уравнения имеет, вид

$$u(x,y) = c_1(x^2 - y^2)\ln|x^2 - y^2| + c_2 \ln|x^2 - y^2| + c_3(x^2 - y^2) + c_4 \qquad (9)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 произвольные постоянные.

Непосредственной проверкой легко можно убедиться что (9) удовлетворяет уравнению (1). Аналогично можно получить общее решение биволнового уравнения в явном виде с помощью замены

$$z = \frac{x-y}{x+y} \text{ или } z = \frac{x+y}{x-y}$$

Так как классические уравнения математической физики имеют бесконечные множество частных решении, то рассматриваемый метод позволит точно определить в явном виде частное решения дифференциальных уравнении в частных производных с постоянными коэффициентами, исходя из физического смысла задачи.