МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ.

Мокин А.Ю.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Факультет Вычислительной математики и кибернетики,
каф. Вычислительных методов.
Россия, 123098, г. Москва, ул. маршала Василевского, д.1, корп.1, кв.16.
Контактный телефон: 8915 0574347. E-mail: MknAndrew@mail.ru.

В работе рассматривается семейство начально-краевых задач для уравнения теплопроводности, которое имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) + \alpha u(1,t), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где α – вещественный параметр.

Данная задача при $\alpha = 0$ известна как задача Самарского–Ионкина и подробно изучена ранее в работах [1]. В настоящей работе исследуется вопрос существования классического решения задачи (1), его единственности и устойчивости по начальным данным в норме пространства $L_2[0,1]$ при любом $\alpha \neq 0$. Осуществлён предельный переход при $\alpha \to 0$, т.е. решение задачи Самарского–Ионкина можно с наперёд заданной точностью приблизить в равномерной метрике решением задачи (1), выбирая специальным образом параметр $\alpha \neq 0$ и функцию $\varphi = \varphi_\alpha(x)$.

Построение решения проводится методом разделения переменных. Предварительно рассматривается задача на собственные значения для оператора второй производной $L(u) = -u''$, подчинённого нелокальным краевым условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = u'(1) + \alpha u(1)$. Доказано, что все собственные числа вещественные и простые. Отсутствие базисности системы собственных функций оператора L при $\alpha \neq 0$ приводит к необходимости построения специальной последовательности функций W, которая образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,1]$ и допускает разделение переменных. Опираясь на разложение решения задачи (1) по системе W, доказывается существование и единственность классического решения в предположениях непрерывности функции $\varphi(x)$ вместе со своей первой производной на $[0,1]$ и при дополнительном требовании

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) + \alpha\varphi(1).$$

Литература.

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Дифференциальные уравнения, т.13, №2, 1977, с. 294-304.