МНК-ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛИНОМОВ ФОКУСНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Т.А. Ракчеева

Институт машиноведения им А.А.Благонравова РАН,
Россия, 117334, Москва, Бардина, 4, rta_ra@list.ru

Фокусная аппроксимация решает классическую задачу приближения замкнутых кривых и поверхностей в классе многофокусных лемнискат, однозначно представляемых совокупностью конечного числа точек - фокусов внутри кривой и радиусом. На комплексной плоскости лемниската L алгебраически представляет собой квадрат модуля комплексного полинома $F(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{m-1} z^{m-1} + z^m$ на уровне R^m с корнями в фокусах и старшим коэффициентом $c_m = 1$. *Задача состоит в определении системы m фокусов* $\{\zeta_k\}$ *и радиуса R лемнискаты L, аппроксимирующей кривую C, заданную координатами n принадлежащих ей точек* z_j.

Поиск непосредственно параметров лемнискаты – системы фокусов – представляет значительные трудности. Так, составление нормальных уравнений для координат фокусов методом наименьших квадратов приводит к системе нелинейных уравнений, степень которых *растет с ростом числа фокусов*.

В связи с этим, предпочтительнее оказался подход к решению поставленной задачи в *два этапа*: сначала найти *аппроксимирующий комплексный полином* $F(z)$, а затем его *корни* ζ_k, - *фокусы лемнискаты L*. Поиск коэффициентов комплексного полинома сводится к минимизации *функционала*:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left|F(z_j)\right|^2 - R^2\right)^2 \to \min, \tag{1}$$

приводящей к системе уравнений для неизвестных коэффициентов c_k полинома $F(z)$ *степени 3*, *независимо от числа фокусов*, что существенно лучше предыдущего.

Другой подход состоит в том, чтобы искать *вещественный полином* $P(x,y) = \Sigma a_{kl} x^k y^l$, минимизирующий функционал, аналогичный (1), при условии, что $P(x,y)$ является квадратом модуля некоторого комплексного полинома $F(z)$, где $z = x + iy$. Система нормальных уравнений при этом получается в виде:

$$\sum_{s,q} a_{sq}\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^s y_j^q \left(x_j^k y_j^l\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^k y_j^l\right)\sum_{j=1}^{n} x_j^s y_j^q\right], \quad 0 \le k, l, s, q \le m. \tag{2}$$

Показано, что если вещественный полином $P(x,y)$ является квадратом модуля комплексного полинома, то он удовлетворяет уравнению: $d^2/dx^2 \ln P(x,y) + d^2/dy^2 \ln P(x,y) = 0$, а искомое условие, необходимое и достаточное, имеет вид:

$$P(x,y)\left(\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{3}$$

Минимизация функционала (2) с учетом ограничений (3) дает *систему уравнений второго порядка* относительно коэффициентов a_{kl} полинома $P(x, y)$. В этом смысле она является наиболее простой. Практическое использование рассмотренных методов, однако, сталкивается с дополнительной проблемой устойчивости.

Литература.

Ракчеева Т.А. Многофокусные лемнискаты: приближение кривых. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010, т. 50, № 11, сс. 2060-2072.