

## О КВАДРАТУРНЫХ И КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

Силаев Д.А., Тепляков Е.В., Кортаев Д.О.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Мех.-мат. ф-т, Россия, 119899, Москва, Воробьёвы горы,  
МГУ, Тел.: 939-05-27 [dasilaev@mail.ru](mailto:dasilaev@mail.ru)

Появление устойчивых полулокальных сглаживающих сплайнов (или S-сплайнов) класса  $C^0$  (только непрерывных), состоящих из полиномов высокой степени ( $n=9, 10$ ) позволило получить квадратурные и кубатурные формулы 10 и 11 порядка аппроксимации. В работах Н.С. Бахвалова [1] показано, что в многомерных областях в некотором смысле оптимальными являются методы вычисления интегралов, основанные на методе Монте-Карло (закон больших чисел). В этих работах показано, что точность этих методов определяется величиной  $O(N^{-1/2})$ , где  $N$  - число точек, случайно брошенных внутрь области. В случае гладких задач, при размерностях 2 и 3 точность полученных нами на основе S-сплайнов 9-й степени формул определяется величинами  $O(N^{-5})$  и  $O(N^{-10/3})$  соответственно ( $N$  - общее число точек), что существенно лучше методов Монте-Карло. В случае подинтегральных функций меньшей гладкости (из  $C^r$ , при  $6 \leq r \leq 10$ ) можно использовать S-сплайны меньшей степени (вплоть до степени  $n=5$ ), т.к. они менее требовательны к гладкости приближаемой функции, но при этом имеют всё еще высокий порядок аппроксимации. Были проведены исследования влияния особенностей подинтегральной функции и границы на точность вычислений. Кроме того, было проведено сравнение эффективности методов численного интегрирования на основе методов Монте-Карло и на основе S-сплайнов для различных областей и особенностей подинтегральной функции. Проведённый анализ позволил получить необходимые условия, накладываемые на область и функцию, для эффективного применения методов интегрирования на основе S-сплайнов с точки зрения вычислительной сложности и получаемой точности метода по сравнению с методами типа Монте-Карло. В частности, в ряде задач наибольшую эффективность демонстрируют гибридные методы.

### Литература

1. Бахвалов Н.С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы // *Сборник работ. Москва. 1964 г., Стр. 5-63.*
2. Силаев Д.А., Кортаев Д.А., О Кубатурных формулах высокого порядка аппроксимации для широкого класса областей // *"Математика. Компьютер. Образование."* Сб. трудов XVI международной конференции. Под общей редакцией Г.Ю. Ризниченко Ижевск: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2009 г., Том 2, Стр. 20-38