

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В АЛЮМИНИЕВОМ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРЕ**

**Алаторцев А.В. , Кузьмин Р.Н. ,  
Проворова О.Г. , Савенкова Н.П.**

(Москва, Красноярск)

Рассматривается задача моделирования процесса электролиза алюминия в конкретных электролизных ваннах. Проводится математическое моделирование физического процесса, учитывающее особенности конструкции конкретной ванны, в том числе состояние настилы на дне ванны. Математическая модель использует информационные возможности уравнения Навье-Стокса, записанного в средах металла и электролита. Система уравнений многомерная, позволяет учитывать магнитно-гидродинамические процессы в двух средах и взаимодействие сред. Задача решается численным методом. В результате расчета моделируется динамика поверхности раздела двух сред и распределение скоростей и токов на границе раздела сред. Проводится сравнение результатов с результатами физического эксперимента.

## **NUMERICAL MODELLING OF MAGNETOHYDRODYNAMICAL PROCESSES IN ALUMINIUM ELECTROLYZER**

**Alatortsev A.V., Kuzmin R.N.,  
Provorova O.G., Savenkova N.P.**

(Moscow, Krasnoyarsk)

The problem of modeling of aluminium electrolysis in concrete electrolytic baths is examined. The mathematical modeling physical process, which is taking into account features of a design of a concrete bath, including an accretion condition at the bottom of a bath, will be carried out. The mathematical model uses information oppor-

tunities of Navier-Stokes equation that has been written down in environments of metal and electrolyte. The system of the equations multivariate, allows taking into account magnetohydrodynamical processes in two environments and interaction of environments. The problem is solved by numerical method. As a result of calculation dynamics of an interface of two environments and distribution of speeds and electric currents on border of the unit of environments is modeled. Comparison of results with results of physical experiment will be carried out.

В настоящей работе рассматривается модель алюминиевого электролизера, используемого в промышленности для производства алюминия в результате разложения глинозема, растворенного в жидком криолите. В современном технологическом процессе получения алюминия большое значение имеет оптимизация работы электролизера для повышения устойчивости процесса и получения максимального выхода металла. Необходимо отметить, что физико-химические процессы в электролизере достаточно сложны и характеризуются наличием мощных токов (до 200 кА), высокой температуры, наличием турбулентных течений и колебанием границы раздела электролит-металл, порождаемых действием электромагнитных сил, выделением газов и образованием настывлей на боковых стенках электролизной ванны. Все это влияет на устойчивость процесса и выход чистого алюминия. Немаловажным фактом является также возможность слишком бурных всплесков жидкого вещества в электролизной ванне, что приводит к выходу из строя дорогостоящего электролизера.

Целью работы является получение динамики изменения границы раздела сред металл-электролит, скоростей в металле и электролите и динамики изменения магнитного поля.

Упрощенно модель алюминиевого электролизера представляет собой прямоугольный бак. Вертикальный ток течет от угольных анодных блоков (частично погруженных в электролит) через слой электролита (где в результате электролиза выделяется алюминий) и слой жидкого алюминия до угольного катода. Слои электролита и металла не перемешиваются.

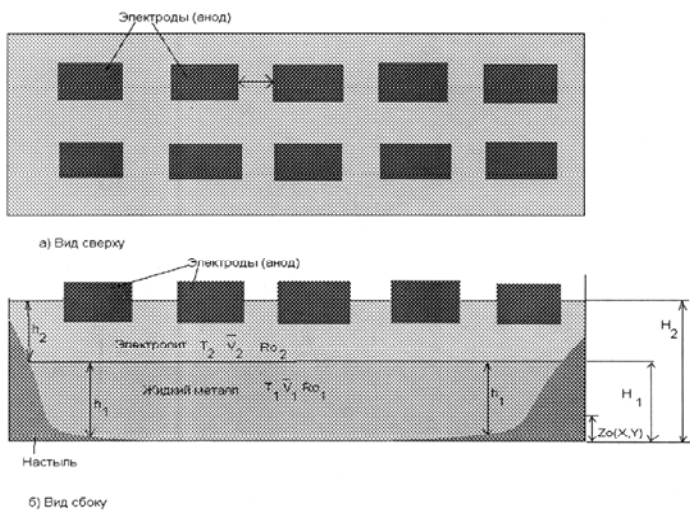


Рис. 1 Схема электролизера.

В качестве исходных уравнений, моделирующих процессы в электролизной ванне, рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики в переменных Эйлера.

Уравнения для жидкого металла:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \vec{V}_1) = Q$$

$$\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 u_1 \vec{V}_1) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \text{div}(\mu_{1T} \text{grad} u_1) + f_{1x}$$

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 v_1 \vec{V}_1) = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \text{div}(\mu_{1T} \text{grad} v_1) + f_{1y}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\rho_1 g + f_{1z}$$

$$\frac{\partial \rho_1 \varepsilon_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 \varepsilon_1 \vec{V}_1) = -p_1 \text{div}(\vec{V}_1) + \text{div}(k_{1T} \text{grad} T_1) + \text{div}(k_{1T} \text{grad} \varepsilon_1) + f_{T1}$$

Уравнения для электролита:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \vec{V}_2) = -Q$$

$$\frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 u_2 \vec{V}_2) = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu_{2T} \operatorname{grad} u_2) + f_{2x}$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 v_2 \vec{V}_2) = -\frac{\partial p_2}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu_{2T} \operatorname{grad} v_2) + f_{2y}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = -\rho_2 g + f_{2z}$$

$$\frac{\partial \rho_2 \varepsilon_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \varepsilon_2 \vec{V}_2) = -p_2 \operatorname{div}(\vec{V}_2) + \operatorname{div}(k_2 \operatorname{grad} T_2) + \operatorname{div}(k_{2T} \operatorname{grad} \varepsilon_2) + f_{T_2}$$

Уравнение электромагнитной индукции:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\vec{\mathbf{V}} * \vec{\mathbf{H}}] - \operatorname{rot}(v_m \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}})$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{H}} = 0$$

Здесь:

$\vec{f}_1 = (f_{1x}, f_{1y}, f_{1z})$  - электромагнитные силы в жидком металле, при этом сила, характеризующая нагревание металла за счет действия электромагнитных сил:

$$\vec{f}_{1,2} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} * \mathbf{H};$$

$$f_{T_{1,2}} = \frac{V_m}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2;$$

Далее проводится осреднение исходных уравнений по вертикальной компоненте в слоях жидкого металла и электролита. В результате получается система:

Слой жидкого металла:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial y} = \bar{\rho}_2 Q$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1^2 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [(h_1 - h_1(t_0)) * (\rho_1 g - f_{1z}) - \bar{p}_1(t_0)] + F_{D\bar{u}_1} + F_{xH_1} + F_{xz_0} + \bar{f}_{1x} h_1$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 h_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [(h_1 - h_1(t_0)) * (\rho_1 g - f_{1z}) - \bar{p}_1(t_0)] + F_{D\bar{v}_1} + F_{yH_1} + F_{yz_0} + \bar{f}_{1y} h_1$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 c_{v1} \bar{T}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 c_{v1} \bar{T}_1 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 c_{v1} \bar{T}_1 h_1}{\partial y} = F_{D\bar{T}_1} + F_{H_1} - F_{z_0} + \bar{f}_{T_1} h_1$$

Отдельно решается задача нахождения осредненного давления в начальный момент времени  $\bar{p}_1(t_0)$  из задачи Дирихле для уравнения Пуассона с граничными условиями прилипания жидкого металла к стенкам ванны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{p}_1 = \frac{\partial}{\partial x} f_{1x} + \frac{\partial}{\partial y} f_{1y}, \text{ где } \Delta \bar{p}_1 = \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial y^2} \\ \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=l_x} = f_{1x}, \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=l_y} = f_{1y} \end{array} \right.$$

Где  $f_{1x}$ ,  $f_{1y}$  в начальный момент заданы и находятся из  $\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$ .

Диффузионные члены определяются по формулам:

$$F_{D\bar{u}_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right)$$

$$F_{D\bar{v}_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right)$$

$$F_{D\bar{T}_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (k_{1T} + k_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (k_{1T} + k_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial y} \right)$$

компоненты силы трения на границе раздела жидкого металла и электролита:

$$F_{x\bar{H}_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}$$

$$F_{y\bar{H}_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}$$

компоненты силы трения на нижней границе жидкого металла:

$$F_{xz_0}, F_{yz_0}$$

$$F_{xz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2}$$

$$F_{yz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2}$$

$F_{H_1}$  – теплообмен между металлом и электролитом на границе раздела:

$$F_{H_1} = \alpha_1 (\bar{T}_2 - \bar{T}_1)$$

Так как удельная электрическая проводимость электролита много меньше проводимости алюминия, то

$$\bar{T}_2 > \bar{T}_1$$

$F_{z_0}$  – теплообмен между металлом и дном ванны, температуру которой будем считать постоянной:

$$F_{z_0} = \alpha_0 (\bar{T}_1 - \bar{T}_0)$$

Уравнение электромагнитной индукции будем использовать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{H}_1}{\rho} \right) + (\mathbf{V}_1, \nabla) \left( \frac{\mathbf{H}_1}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}_1}{\rho}, \nabla \right) \mathbf{V}_1 - \frac{1}{\rho} \text{rot}(v_m \text{rot} \mathbf{H}_1),$$

Слой электролита:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2^2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [(h_2 - h_2(t_0)) * (\rho_2 g - f_{2z}) - \bar{p}_2(t_0)] + \\ &+ F_{D\bar{u}_2} + F_{xH_2} + F_{xH_1} + \bar{f}_{2x} h_2 \\ \frac{\partial \bar{\rho}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial y} &= -\bar{\rho}_2 Q \\ \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2 h_2}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} [(h_2 - h_2(t_0)) * (\rho_2 g - f_{2z}) - \bar{p}_2(t_0)] + \\ &+ F_{D\bar{v}_2} + F_{yH_2} + F_{yH_1} + \bar{f}_{2y} h_2 \\ \frac{\partial \bar{\rho}_2 c_{v_2} \bar{T}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 c_{v_2} \bar{T}_2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 c_{v_2} \bar{T}_2 h_2}{\partial y} &= F_{D\bar{T}_2} + F_{H_2} - F_{H_1} + \bar{f}_{T_2} h_2 \end{aligned}$$

Отдельно решается задача нахождения осредненного давления в начальный момент времени  $\bar{p}_2(t_0)$  из задачи Неймана для уравнения Пуассона с граничными условиями, полученными за счет перепада весов:

$$\begin{cases} \Delta \bar{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x} f_{2x} + \frac{\partial}{\partial y} f_{2y} \\ \bar{p}_2 \Big|_{\substack{y=0 \\ y=l_y \\ x=0 \\ x=l_x}} = \rho_2 g \left( H_3 - \frac{H_1 + H_2}{2} \right) \end{cases}$$

где  $H_1, H_2, H_3$ , -параметры ванны:

$$\begin{aligned} F_{D\bar{u}_2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \right) \\ F_{D\bar{v}_2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \right) \\ F_{D\bar{T}_2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (k_{2T} + k_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( (k_{2T} + k_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Данное уравнение Пуассона, как и для металла, решается методом матричной прогонки.

Диффузионные члены определяются формулами:  
компоненты силы трения на верхней границе электролита, при этом под анодами:

$$F_{x\bar{H}_2}, F_{y\bar{H}_2}$$

$$F_{xH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2},$$

$$F_{yH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2}$$

в остальной области эти силы равны нулю.

$F_{H_2}$  характеризует теплообмен с воздухом в каналах:

$$F_{H_2} = \alpha_2 (\bar{T}_2 - \bar{T}_6)$$

Уравнение электромагнитной индукции будем использовать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{H}_2}{\rho} \right) + (\mathbf{V}_2, \nabla) \left( \frac{\mathbf{H}_2}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}_2}{\rho}, \nabla \right) \mathbf{V}_2 - \frac{1}{\rho} \text{rot}(v_m \text{rot} \mathbf{H}_2),$$

Данная система уравнений численно решается на компьютере с помощью расщепления на этапы по физическим процессам. Применяемый разностный метод условно устойчив, но вывести аналитически условие устойчивости не представляется возможным в виду сложности схемы. Условие устойчивости получено эмпирическим путем в результате большого числа экспериментов:

$$\Delta t < C \frac{\min(h_x, h_y)}{\max(V_{1,\max}, V_{2,\max}, H_{1,\max}, H_{2,\max})}$$

$$\text{где } A_{k,\max} = \max_{i,j} (|\bar{A}_{k,ij}|) \text{ для } A = V, H; k = 1, 2$$

Ниже приведены результаты математического эксперимента с реальными начальными данными: графики поверхности раздела.



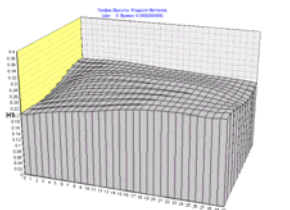


Рис. 2. Начальный момент времени.

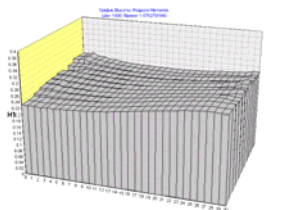


Рис. 3. Шаг 1000

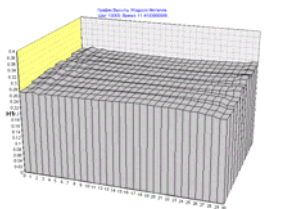


Рис. 4. Шаг 10000

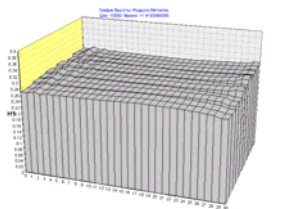


Рис. 5. Шаг 100000

В процессе расчета поле скоростей под воздействием электромагнитных сил и состояния поверхности раздела постепенно принимает более грубый вид, чем задан изначально, однако сохраняется тенденция к турбулентному течению, что соответствует реально происходящим процессам. Поверхность раздела постепенно выравнивается, и в процессе осаждения металла повышается ее уровень. По краям ванны сохраняется некоторое возмущение. Приблизительность расчетов обусловлена грубостью сетки и тем, что на данный момент все еще не учтены некоторые важные факторы, такие как влияние конфигурации анодов на процесс. На данный момент размерность сетки составляет 10 на 30 узлов – таково разрешение начальных данных, полученных в результате физического эксперимента. В будущем планируется интерполировать эти данные, что позволит производить более точные вычисления. Также планируется учесть конфигурацию анодов, чему поможет проведение экспериментов с магнитной жидкостью.

### Литература.

1. Кузьмин Р.Н., Кулешов А.А., Проворова О.Г., Поляков П.В.,

- Пингин В.В., Савенкова Н.П. “Нестационарная модель движения расплава в электролизной ванне”. Труды четвертого сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000). Новосибирск, 2001, с.96-102.
2. Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Савенкова Н.П. “Математическое моделирование физических полей в алюминиевом электролизере”. Труды девятого международного конгресса “Математика. Компьютеры. Образование”. Дубна, 2002, ч. II, с. 393-397.