

РАСЧЕТ ПЛОТНОСТИ В ТЕПЛОМ ПЯТНЕ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ¹

Шайдуров В.В., Щепановская Г.И., Малышев А.В.

(Красноярск)

Рассмотрена математическая модель для исследования распространения импульса энергии большой мощности в вязком теплопроводном газе. Реализован вычислительный эксперимент на 16-ти процессорной вычислительной системе МВС-1000/16 с пиковой производительностью 14.0 миллиардов операций в секунду.

SOLUTION TO HEAT-CONDUCTIVE SPOT DENSITIES BASED ON MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEM

Shaidurov V.V., Shchepanovskaya G.I., Malyshev A.V.

(Krasnoyarsk)

A mathematical model for the research of the high-powered impulse propagation in viscous heat-conductive gas is considered. A computational experiment on 16-processor computational system MCS-1000/16 with peak productivity of 14.0 billion operations per second is realized.

1. Физико-математическая постановка задачи. Уравнения вязкого теплопроводного газа в векторной форме записываются в следующем виде [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 02-01-00523, проект N 02-07-90135), Минобрразования РФ (проект N УР.03.01.031).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \vec{v}) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (\Pi_{ij} \cdot \vec{v}), \quad (3)$$

$$p = p(\rho, e), \quad e = e(\rho, T). \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность, \vec{v} – вектор скорости, $E = e + v^2/2$ – полная энергия единицы объема, e – внутренняя энергия единицы массы, \vec{q} – вектор плотности теплового потока, \vec{f} – сила, отнесенная к единичной массе, Π_{ij} – компоненты тензора напряжений.

Начальные и краевые условия определяются из условия равенства нулю вектора скорости во всей области течения, а значения плотности и температуры соответствуют покоящемуся газу:

$$\vec{v} = 0, \quad \rho = T = 1. \quad (5)$$

Остальные искомые величины в начальный момент связаны условием однородности газа на бесконечности. Распределение локального импульса энергии большой мощности Q соответствует заданному режиму.

2. Дискретизация по времени. Линеаризация. Рассмотрим систему уравнений (1) – (4) в декартовой системе координат x, y для двумерного случая. Для дискретизации по времени введем равномерную разностную сетку по времени с шагом τ :

$$\omega_\tau = \{t_k : t_k = \tau \cdot k, \quad k = 0, \dots, m\}.$$

Производные по времени от искомым величин заменим односторонними разностями первого порядка аппроксимации.

Уравнение неразрывности переходит в следующее:

$$\frac{\rho^{k+1} - \rho^k}{\tau} + \frac{\partial(\rho^{k+1} u^{k+1})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho^{k+1} v^{k+1})}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Уравнения количества движения в полудискретной формулировке принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho^{k+1} \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + \rho^{k+1} u^{k+1} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} + \rho^{k+1} v^{k+1} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial y} + \frac{\partial p^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^{k+1}}{\partial y} &= 0, \\ \rho^{k+1} \frac{v^{k+1} - v^k}{\tau} + \rho^{k+1} u^{k+1} \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} + \rho^{k+1} v^{k+1} \frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} + \frac{\partial p^{k+1}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^{k+1}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Полудискретное уравнение энергии таково:

$$\begin{aligned} \rho^{k+1} \frac{e^{k+1} - e^k}{\tau} + u^{k+1} \frac{\partial e^{k+1}}{\partial x} + v^{k+1} \frac{\partial e^{k+1}}{\partial y} + p^{k+1} \left(\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} \right) &= \\ = \frac{Q^{k+1} - Q^k}{\tau} - \frac{\partial q_x^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial q_y^{k+1}}{\partial y} + \Phi^{k+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь компоненты тензора напряжений определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^{k+1} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \mu^k \left(2 \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} \right), & \tau_{xy}^{k+1} &= \frac{1}{\text{Re}} \cdot \mu^k \left(2 \frac{\partial u^{k+1}}{\partial y} + \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy}^{k+1} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \mu^k \left(2 \frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} - \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты вектора теплового потока

$$q_x^{k+1} = -\frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \cdot \mu^k \frac{\partial e^{k+1}}{\partial x}, \quad q_y^{k+1} = -\frac{\gamma}{\text{Re Pr}} \cdot \mu^k \frac{\partial e^{k+1}}{\partial y}. \quad (10)$$

Диссипативная функция на $k+1$ - шаге определена как

$$\begin{aligned} \Phi^{k+1} &= \frac{\mu^k}{\text{Re}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial u^{k+1}}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

На каждом шаге по времени система уравнений (6) – (8) является нелинейной системой уравнений в частных производных. Предлагается осуществить линеаризацию рассматриваемых уравнений, используя в нелинейных членах в качестве коэффи-

циентов их значения с предыдущего шага по времени [3, 4]. В этом случае для уравнения неразрывности (6) проекции вектора скорости u^{k+1} и v^{k+1} заменяются на u^k и v^k и уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\rho^{k+1} - \rho^k}{\tau} + \frac{\partial(u^k \rho^{k+1})}{\partial x} + \frac{\partial(v^k \rho^{k+1})}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) является линейным относительно ρ^{k+1} и обладает соответствующими краевыми условиями, достаточными для однозначной разрешимости. С учетом найденных значений ρ^{k+1} уравнения количества движения (7) приводятся к следующей записи:

$$\begin{aligned} \rho^{k+1} \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + \rho^{k+1} u^k \frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} + \rho^{k+1} v^k \frac{\partial u^{k+1}}{\partial y} + \frac{\partial p^k}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^{k+1}}{\partial y} = 0, \\ \rho^{k+1} \frac{v^{k+1} - v^k}{\tau} + \rho^{k+1} u^k \frac{\partial v^{k+1}}{\partial x} + \rho^{k+1} v^k \frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} + \frac{\partial p^k}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^{k+1}}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (13) также линейны относительно u^{k+1} и v^{k+1} , поскольку u^k , v^k , p^k и μ^k известны с предыдущего шага по времени.

Уравнение энергии (8) также приводится к линейному уравнению:

$$\begin{aligned} \rho^{k+1} \frac{e^{k+1} - e^k}{\tau} + \rho^{k+1} u^k \frac{\partial e^{k+1}}{\partial x} + \rho^{k+1} v^k \frac{\partial e^{k+1}}{\partial y} + p^k \left(\frac{\partial u^{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{k+1}}{\partial y} \right) = \\ = \frac{Q^{k+1} - Q^k}{\tau} - \frac{\partial q_x^{k+1}}{\partial x} - \frac{\partial q_y^{k+1}}{\partial y} + \Phi^{k+1}, \end{aligned} \quad (14)$$

в котором ρ^{k+1} , u^{k+1} , v^{k+1} , Φ^{k+1} определяются решениями уравнений (12) и (13).

Вычислительный эксперимент. Рассмотрим явную разностную схему для уравнения неразрывности с регуляризирующими слагаемыми.

Будем аппроксимировать уравнение неразрывности (12) на

равномерной квадратной сетке с шагом $h = 1/n$ и узлами сетки, соответственно,

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, n; \quad y_j = jh, \quad j = 0, \dots, n.$$

Рассмотрим следующую разностную схему:

$$\frac{\rho_{i,j,k+1} - \rho_{i,j,k}}{\tau} + \frac{(\rho u)_{i+1,j,k} - (\rho u)_{i-1,j,k}}{2h} + \frac{(\rho v)_{i,j+1,k} - (\rho v)_{i,j-1,k}}{2h} = f_{i,j,k} \quad (15)$$

Как известно, такая схема неустойчива. Для повышения устойчивости дополним ее регуляризирующими слагаемыми второго порядка малости

$$-h \frac{\partial^2 (\gamma(x, y) \rho)}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad -h \frac{\partial^2 (\delta(x, y) \rho)}{\partial y^2},$$

или, в разностной форме:

$$\frac{(\gamma \rho)_{i+1,j,k} - 2(\gamma \rho)_{i,j,k} + (\gamma \rho)_{i-1,j,k}}{h} - \frac{(\delta \rho)_{i,j+1,k} - 2(\delta \rho)_{i,j,k} + (\delta \rho)_{i,j-1,k}}{h}. \quad (16)$$

Просуммировав (15) и (16), получаем итоговую разностную формулу, аппроксимирующую уравнение неразрывности (12) с первым порядком:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{i,j,k+1} - \rho_{i,j,k}}{\tau} + \\ & + \frac{(\rho u)_{i+1,j,k} - (\rho u)_{i-1,j,k}}{2h} + \frac{(\rho v)_{i,j+1,k} - (\rho v)_{i,j-1,k}}{2h} - \\ & - \frac{(\gamma \rho)_{i+1,j,k} - 2(\gamma \rho)_{i,j,k} + (\gamma \rho)_{i-1,j,k}}{h} - \\ & - \frac{(\delta \rho)_{i,j+1,k} - 2(\delta \rho)_{i,j,k} + (\delta \rho)_{i,j-1,k}}{h} = f_{i,j,k}. \end{aligned}$$

Чтобы получить монотонно обратную разностную схему, перепишем последнее уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k+1} = \rho_{i,j,k} - \\ - \frac{\tau}{2h} \left[\begin{aligned} &(\rho u)_{i+1,j,k} - (\rho u)_{i-1,j,k} + (\rho v)_{i,j+1,k} - (\rho v)_{i,j-1,k} + \\ &+ 4(\gamma\rho)_{i,j,k} - 2(\gamma\rho)_{i+1,j,k} - 2(\gamma\rho)_{i-1,j,k} + \\ &+ 4(\delta\rho)_{i,j,k} - 2(\delta\rho)_{i,j+1,k} - 2(\delta\rho)_{i,j-1,k} \end{aligned} \right] + \quad (17) \\ + \tau f_{i,j,k}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы все коэффициенты при ρ в правой части были неотрицательны. Такое требование приводит к следующим ограничениям:

$$\text{для } \rho_{i,j,k} : \frac{1}{\tau} - \frac{2\gamma_{i,j,k}}{h} - \frac{2\delta_{i,j,k}}{h} \geq 0;$$

$$\text{для } \rho_{i+1,j,k} : \frac{\gamma_{i+1,j,k}}{h} - \frac{u_{i+1,j,k}}{2h} \geq 0;$$

$$\text{для } \rho_{i-1,j,k} : \frac{\gamma_{i-1,j,k}}{h} + \frac{u_{i-1,j,k}}{2h} \geq 0;$$

$$\text{для } \rho_{i,j+1,k} : \frac{\delta_{i,j+1,k}}{h} - \frac{v_{i,j+1,k}}{2h} \geq 0;$$

$$\text{для } \rho_{i,j-1,k} : \frac{\delta_{i,j-1,k}}{h} - \frac{v_{i,j-1,k}}{2h} \geq 0;$$

при $\forall i \in [0, n], j \in [0, n], k \in [0, m]$.

Из неравенств следует критерий для функций $\gamma(x, y)$ и $\delta(x, y)$:

$$\gamma \geq \frac{\|u\|_{\infty, \Omega}}{2}, \quad \delta \geq \frac{\|v\|_{\infty, \Omega}}{2},$$

где $\|f\|_{\infty, \Omega} = \max_{\Omega} |f(x, y)|$.

Из первого неравенства следует правило выбора шага по времени τ

$$\tau \leq \frac{h}{2(\|\gamma\|_{\infty, \Omega} + \|\delta\|_{\infty, \Omega})}.$$

Потребуем также, чтобы функции $\gamma(x, y)$ и $\delta(x, y)$ гладко совпадали с $u(x, y)$ и $v(x, y)$ соответственно по всей границе

области Ω .

Сконструируем функции $\gamma(x, y)$ и $\delta(x, y)$ следующим образом:

$$\begin{cases} w(x, y) = xy(1-x)(1-y), \\ \gamma(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(u(x, y)/2)^2 + \alpha \|u\|_{\infty, \Omega}^2} \exp(-\beta/w(x, y)), & \text{если } w(x, y) > 0, \\ |u(x, y)/2|, & \text{если } w(x, y) \leq 0; \end{cases} \\ \delta(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(v(x, y)/2)^2 + \alpha \|v\|_{\infty, \Omega}^2} \exp(-\beta/w(x, y)), & \text{если } w(x, y) > 0, \\ |v(x, y)/2|, & \text{если } w(x, y) \leq 0; \end{cases} \end{cases}$$

с настроечными параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, которые определяются из дополнительных соображений.

Определим достаточное условие для шага по времени. Учитывая, что $w(x, y)$ достигает максимума на Ω в точке $1/2, 1/2$ со значением $1/16$ получаем

$$\tau \leq \frac{h}{(\|u\|_{\infty, \Omega} + \|v\|_{\infty, \Omega}) \sqrt{4\alpha \exp(-16\beta) + 1}}.$$

Итак, последними двумя формулами и (15) полностью определяется разностная схема, аппроксимирующая задачу с первым порядком точности.

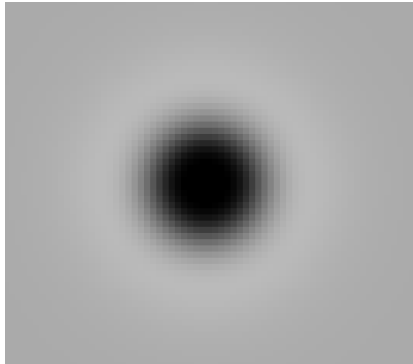


Рис. 1. Установившееся поле плотности в окрестности источника

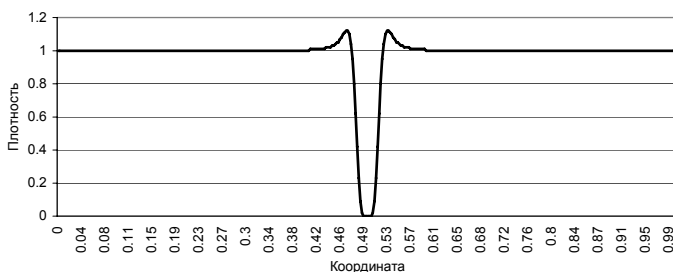


Рис. 2. Разрез поля плотности через центр источника

В процессе вычислительного эксперимента решалась задача для уравнений неразрывности на пространственно-временной сетке с дополнительными условиями в виде нормированных компонент скорости, реализующих процесс типа «точечный источник» из середины области Ω .

Для решения задачи использовалась распараллеленная явная схема с регуляризацией. При подготовке программы использовались компиляторы C/C++ v.6.0 фирмы Intel на МВС-1000/16, C/C++ фирмы Compaq на МВС-1000М. Задача была решена на 1, 4, 6 и 15 процессорах кластера МВС-1000/16, на 30, 60 и 100 процессорах кластера МВС-1000М с размером матрицы $n = 300 \times 300, 600 \times 600, 1200 \times 1200$ и количеством итераций, равным 500.

Вычислительная схема продемонстрировала устойчивую сходимость к стационарному процессу. Картина установившегося процесса качественно совпадает с теоретически известным решением. На рис. 1 изображено установившееся поле плотности в окрестности центра источника (0.5, 0.5). Более тёмные области отвечают меньшей плотности, более светлые – большей. На рис. 2 приведён разрез поля плотности через центр источника. Здесь можно видеть точные значения плотности в центре области, в зоне волны и в невозмущённой части области Ω .

Литература.

1. Шайдулов В.В., Щепановская Г.И. Математическое моделирование нестационарного распространения импульса энер-

- гии большой мощности в вязком теплопроводном газе // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6. – Ч. 2. – Спец. выпуск. – С. 693 – 698.
2. Шайдуров В.В., Щепановская Г.И. Пространственное течение вязкого теплопроводного газа при наличии источника энергии большой мощности // Труды Международной конференции «Математические модели и методы их исследования». – Красноярск: ИВМ СО РАН. – 2001. – Т. 2. – С. 263 – 266.
 3. Шайдуров В.В., Щепановская Г.И. Расчет нестационарного течения вязкого теплопроводного газа с сильной концентрацией энергии // Труды II Всесибирского конгресса женщин – математиков. – Красноярск: КГУ. – 2002. – С. 153 – 157.
 4. Shaidurov V.V., Shchepanovskaya G.I. Solution to viscous heat – conductive gas equations based on multiprocessor computer system // Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. – Novosibirsk: ICM & MG Publisher. – 2002. – Part I. – P. 83 – 87.