МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ЦЕХА МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Аснина А.Я., Балашева С.Ю.

(Воронеж)

В статье рассматривается работа механического цеха предприятия, производящего детали различных типов. Производство носит циклический характер. Для каждого наименования деталей известен перечень операций и их длительности, а также количество, которое должно быть произведено за месяц (период цикла). Требуется найти очередность запуска партий различных деталей в производство, при которой для каждого станка «усредняется» время его работы за 3 декады месяца. В статье приведены формулы для расчета промежутков времени между окончанием одной операции для партии деталей и началом следующей операции, а также математическая модель задачи с приведенной к линейному виду целевой функцией.

MODELLING AND OPTIMIZATION OF A FUNCTIONING OF A MECHANICAL WORKSHOP OF AN ENGINEERING FACTORY

Asnina A.Y., Balasheva S.Y.

(Voronezh)

The operation of a mechanical workshop of a factory manufacturing details of different kinds is considered in this paper. The manufacturing process is cyclical. The list of operations and their duration is known for each detail, and also the amount, which should be produced for one month (a period of a cycle). It is required to find the queue of launching of batches of different details in production, at which one for each machine the time of its operation for 3 10-days periods of a month is the closest to the "average" value. The formulas for calculation of time intervals between a termination of one operation for a batch of details and beginning of following operation are given in this paper, and also the mathematical model of a problem with a reduced to a linear form objective function.

Рассматривается задача составления расписания производства деталей в одном из механических цехов машиностроительного предприятия.

Производство носит циклический характер с определенным периодом (месяц). Для каждого наименования деталей известно количество, которое должно быть произведено за месяц.

Каждая деталь в процессе производства подвергается поочередно определенным операциям, длительности которых считаются известными. Прерывания во время выполнения операции запрещены.

В зависимости от списка операций детали могут быть отнесены к одному из типов. Детали одного типа могут отличаться не только длительностями, но и наличием либо отсутствием некоторых операций в технологическом маршруте.

Таким образом, задача составления расписания для всей номенклатуры деталей может быть разбита на отдельные подзадачи для различных типов деталей.

Так как за месяц детали должны быть произведены в сравнительно больших количествах, имеет смысл запускать их в производство не единично, а партиями некоторого размера. В этом случае каждая операция должна выполняться для всей партии деталей без перерыва (как если бы это была одна деталь). Но каждая следующая операция может быть начата до полного завершения предыдущей операции для всей партии (важно только, чтобы не пересекались последовательные операции для каждой единичной детали). Отрицательные промежутки времени между окончанием предыдущей операции для всей партии и началом следующей операции могут быть рассчитаны по известным длительностям операций для одной детали и количеству деталей в партии.

Кроме операций, выполняемых на станках, в процесс производства включены и «ручные» операции. Эти операции имеют следующие особенности: их может выполнять тот же рабочий, который «отвечает» за выполнение предыдущей операции на станке, в то же время, когда выполняется предыдущая операция для последующих деталей. Кроме того, для таких операций отсутствует ограничение непрерывности во время обслуживания партии деталей.

Таким образом, при составлении расписания такие «ручные» операции можно не рассматривать отдельно (как требующие для выполнения определенный станок), а просто учитывать их длительности при расчете промежутков между окончанием операции, предшествующей данной, и началом операции, следующей за данной.

Расчет этих промежутков может быть произведен следующим образом.

Рассмотрим партию из r одинаковых деталей и две последовательные операции А и В, выполняемые на станках. Пусть a и b – длительности этих операций для одной детали. Величину промежутка можно определить из условия запрета простоев в обработке партии каждым из станков. Это означает, что к моменту завершения обработки каждой детали из партии должна быть готова к обработке следующая деталь. Тогда, если $a \leq b$, обработка на последующем станке может быть начата непосредственно после обработки на предыдущем станке первой детали. Иная ситуация имеет место, когда $a > b$. В этом случае, если обработку первой детали на последующем станке начинать сразу после завершения предыдущей операции, то к моменту ее окончания вторая деталь не будет готова к обработке. Поэтому промежуток необходимо рассчитывать из условия, что последняя деталь из партии переходит на обслуживание на следующий станок без ожидания. Окончательно, величина промежутка рассчитывается по формуле

$$-(r-1)min(a,b). \tag{1}$$

Предположим теперь, что между операциями А и В должна выполняться «ручная» операция С с длительностью c для одной детали. В силу особенностей такой операции, промежуток между окончанием операции А для последней детали партии и началом операции В для ее первой детали может быть рассчитан по формуле

$$c-(r-1)min(a,b), \text{ если } c \leq max(a,b), \tag{2}$$

rc-$(r$-$1)(a+b)$, если $c> max(a,b)$.

Далее под словом «деталь» будет пониматься партия из нескольких одинаковых деталей. В этом же смысле будет употребляться термин «требование» (такая терминология принята в теории расписаний).

Цикл (месяц) разобьем на смены (декады). Будем считать, что заданы величины n_1, n_2, n_3 – количества деталей, которые должны быть произведены соответственно за первую, вторую и третью декаду месяца. Эти количества можно рассчитать, например, так: $n_l = n\tau_l /\tau$, где n – общее количество деталей (рассматриваемого типа), которые должны быть произведены за месяц, τ – число рабочих дней в месяце, τ_l– число рабочих дней в l-й декаде, l=1,2,3.

Пусть число последовательных операций (не включая «ручные») для каждой детали равно m и индексом k=1..m будет условно обозначаться станок (или «прибор»), выполняющий k-ю операцию.

Поскольку неизбежны начальные простои (в первый день декады) всех приборов, кроме первого, а в следующем месяце будут обрабатываться такие же требования, предполагается возможным следующее «смещение»: требование, которое обслуживается последним в смене (декаде) на некотором приборе k, на (k+1)-м приборе будет перенесено в начало следующей смены; требование, завершающее последнюю смену цикла на приборе k, на (k+1)-м приборе будет перенесено в начало первой смены следующего цикла.

Задача состоит в поиске очередности обслуживания требований на 1-м приборе (на остальных приборах она считается такой же), при которой, например, будет минимальным максимальное относительное отклонение длительностей смен по каждому прибору от «идеального» для соответствующего прибора значения. «Идеальное» значение для k-го прибора и l-й смены соответствует отсутствию простоев этого прибора и может быть рассчитано как

$$\xi_{kl} = \beta_l \, \mathrm{T}_k, \qquad (3)$$

где T_k – сумма длительностей операций по данному прибору, $\beta_l = \tau_l /\tau$. Под длительностью смены понимается время работы станка по выполнению операций в течение данной декады, увеличенное на время простоев этого станка.

Зная очередность обслуживания требований на 1-м приборе, можно указать для каждого станка, какие именно детали и в каком порядке будут обрабатываться в течение каждой декады месяца.

Составим математическую модель задачи.

Пусть i=1..n – индекс требования (детали, партии), j – номер позиции в расписании. Так как расписание задается перестановкой индексов требований, то j также должен принимать значения от 1 до n. Но требование, занимающее последнюю позицию в расписании, по всем приборам, начиная со второго, переносится в первую декаду и обслуживается перед требованием, занимающим первую позицию, то удобно считать, что позиция, предшествующая первой (фактически – нулевая), является n-й. Поэтому будем считать, что j принимает значения от 0 до n.

Пусть k=1..m – индекс прибора (станка), t_{ki} – длительность обработки i-го требования k-м станком, α_{ki} – длительность обязательной задержки в обслуживании i-го требования перед k-й операцией (k>1). Если i-е требование представляет собой партию из r деталей, то величина α_{ki} может быть рассчитана в соответствии с формулами (1), (2). Таким образом, если k-я операция следует непосредственно за (k-1)-й, то

$$\alpha_{ki} = -(r-1)min(t'_{ki},\ t'_{k-1,i}), \tag{4}$$

а если между ними выполняется «ручная» операция, то

$$\alpha_{ki} = c'_i - (r-1)min(t'_{ki},\ t'_{k-1,i}), \tag{5}$$

если $c'_i \le max\ (t'_{ki},\ t'_{k-1,i})$, и

$$\alpha_{ki} = r\, c'_i - (r-1)(t'_{ki} + t'_{k-1,i}), \tag{6}$$

если $c'_i > max\ (t'_{ki},\ t'_{k-1,i})$. Здесь $t'_{ki}=t_{ki}/r$ – длительность k-й операции для одной детали из партии, c'_i – длительность «ручной» операции для одной детали.

Введем следующие переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ - е требование обслуживается} \\ & \text{в расписании } j \text{ - м по порядку,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

i=1..n, j=0..n;

y_{kj} – время простоя k-го прибора перед обслуживанием j-го по порядку требования в расписании, k=1..m, j=0..n;

z_{kj} – длительность простоя (задержки в обслуживании) j-го по порядку требования из-за занятости k-го прибора, k=1..m, j=0..n;

T_{kl} – длительность l-й смены по k-му прибору, k=1..m, l=1,2,3 (под длительностью смены понимается время работы прибора по выполнению операций в течение данной смены, увеличенное на время простоев этого прибора).

Тогда модель задачи выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j=1..n;\ \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i=1..n;\ \ x_{ij} = \{0;1\},\ i, j=1..n; \tag{7}$$

$$x_{io} - x_{in} = 0,\ i=1..n; \tag{8}$$

$$y_{kj} \geq 0, \quad z_{kj} \geq 0,\ k=1..m, j=0..n; \tag{9}$$

ограничения для первой смены:

$$z_{20} - z_{2n} = 0; \tag{10}$$

$$y_{1j} = 0, \quad z_{1j} = 0,\ j=1..n_1; \tag{11}$$

$$y_{k,n-k+2} = 0, \quad z_{k,n-k+2} = 0,\ k=2..m; \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{n}(t_{k-1,i} + \alpha_{ki})x_{ij} + \\ &+\sum_{i=1}^{n}(t_{ki} + \alpha_{ki})x_{i,j-1} - y_{k-1,j} + z_{k,j-1} + y_{kj} - z_{kj} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

k=2..m, j=1..n-k+1, j=n-k+3..n;

$$T_{11} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_1} t_{1i} x_{ij}; \tag{14}$$

$$T_{k1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n-k+2}^{n} t_{ki} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_1-k+1} t_{ki} x_{ij} + \sum_{j=n-k+2}^{n} y_{kj} + \sum_{j=1}^{n_1-k+1} y_{kj}, \ k=2..m; \quad (15)$$

ограничения для второй смены:

$$y_{1j} = 0, \quad z_{1j} = 0, \ j = n_1+1..\ n_1+n_2; \quad (16)$$

$$y_{k,n_1-k+2} = 0, \quad z_{k,n_1-k+2} = 0, \ k=2..m; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{n} (t_{k-1,i} + \alpha_{ki}) x_{ij} + \\ &+\sum_{i=1}^{n} (t_{ki} + \alpha_{ki}) x_{i,j-1} - y_{k-1,j} + z_{k,j-1} + y_{kj} - z_{kj} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

k=2..m, j=n_1-k+3.. n_1+n_2-k+1;

$$T_{k2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n_1-k+2}^{n_1+n_2-k+1} t_{ki} x_{ij} + \sum_{j=n_1-k+2}^{n_1+n_2-k+1} y_{kj}, \ k=1..m; \quad (19)$$

ограничения для третьей смены:

$$y_{1j} = 0, \quad z_{1j} = 0, \ j = n_1+n_2+1..\ n; \quad (20)$$

$$y_{k,n_1+n_2-k+2} = 0, \quad z_{k,n_1+n_2-k+2} = 0, \ k=2..m; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{n} (t_{k-1,i} + \alpha_{ki}) x_{ij} + \\ &+\sum_{i=1}^{n} (t_{ki} + \alpha_{ki}) x_{i,j-1} - y_{k-1,j} + z_{k,j-1} + y_{kj} - z_{kj} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

k=2..m, j=n_1+n_2-k+3.. n-k+1;

$$T_{k3} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n_1+n_2-k+2}^{n-k+1} t_{ki} x_{ij} + \sum_{j=n_1+n_2-k+2}^{n-k+1} y_{kj}, \ k=1..m; \quad (23)$$

целевая функция:

$$\max_{k=1..m,\, l=1,2,3} \frac{T_{kl} - \xi_{kl}}{\xi_{kl}} \to \min . \quad (24)$$

Модель включает стандартные ограничения задачи о назначениях (7), смысл которых в том, что каждое требование занимает в точности одну позицию в расписании.

Требования, занимающие в расписании позиции n-k+2, n_1-k+2 и n_1+n_2-k+2 обслуживаются k-м прибором (k=2..m) первыми по порядку соответственно в первой, второй и третьей декаде месяца. Так как с началом новой декады отсчет времени как бы начинается снова, то обнуляются простои приборов перед этими требованиями и задержки самих требований (ограничения (12), (17), (21)).

Ограничения (13), (18), (22) отражают связь простоев приборов и задержек требований с порядком их обслуживания.

Целевая функция (24)означает, что расписание оптимально, если для него будет минимальным максимальное относительное отклонение длительностей смен по каждому прибору от «идеального» для соответствующего прибора значения ξ_{kl}, вычисляемого по формуле (3).

Целевая функция может быть приведена к линейному виду следующим образом. Обозначим $\lambda = \max\limits_{k=1..m,\, l=1,2,3} \dfrac{T_{kl} - \xi_{kl}}{\xi_{kl}}$. Тогда можно записать дополнительные ограничения

$$\frac{T_{kl} - \xi_{kl}}{\xi_{kl}} \le \lambda, \ k=1..m, \ l=1,2,3$$

или

$$T_{kl} - (1+\lambda)\beta_l T_k \le 0, \ k=1..m, \ l=1,2,3, \qquad (25)$$

а целевой функцией будет

$$\lambda \to \min. \qquad (26)$$

Таким образом, модель задачи включает ограничения (7)-(23), (25) и целевую функцию (26).

Задача может быть эквивалентно перезаписана с помощью функции Лагранжа и решена применением субградиентной процедуры к двойственной задаче. Этот прием использовался авторами при решении других задач теории расписаний для систем конвейерного типа и описан, например, в [1]-[3].

Литература.

1. Аснина А.Я., Балашева С.Ю. О конвейерной системе с различными моментами поступления требований и обязательными задержками между стадиями // Оптимизация и моделирование в автоматизированных системах: Межвуз. сб. науч. трудов. Воронеж: ВГТУ, 2000. С. 150-158.
2. Аснина А.Я., Балашева С.Ю. Оптимизация в системе конвейерного типа с ограничением времени обслуживания // Математика. Компьютер. Образование: Сб. трудов V Международной конференции. М.: Прогресс-Традиция, 1998. Вып.5. Часть II. С. 12-18.
3. Балашева С.Ю. О некоторых подходах к решению задачи Беллмана – Джонсона и ее модификаций // Математика. Образование. Экология. Гендерные проблемы: Материалы международной конференции (Воронеж, 22-27 мая 2000г.). Том 2. М.: Прогресс-Традиция, 2001. С. 31-37.