ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ И ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ C^{n}

Нелаев А.В.

(Москва)

На функции, голоморфные в рассматриваемых автором ограниченных выпуклых круговых областях $D \subset \mathrm{C}^{\mathrm{n}}(n \geq 2)$ класса Λ, распространяются несколько граничных свойств голоморфных функций одного комплексного переменного.

ABOUT INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BOUNDARY PROPERTIES OF FUNCTIONS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES HOLOMORPHIC IN CIRCULAR DOMAINS C^{N}

Nelaev A. V.

(Moscow)

On holomorphic functions in the limited convex circular domains $D \subset \mathrm{C}^{\mathrm{n}}(n \geq 2)$ classes Λ considered by the author are distributed some boundary properties holomorphic functions of one complex variable.

1^0. В 1926 году шведский математик Таге Карлеман [12] впервые получил для специального вида плоской области интегральную формулу, которая, в отличие от классической интегральной формулы Коши, восстанавливала в области голоморфную функцию не по всей границе, а лишь по некоторой её части. В честь этого результата в дальнейшем целый ряд формул аналогичного характера в одно- и многомерном анализе (в последнем случае если восстановление идёт по части *границы Шилова* области) стали именовать *формулами Карлемана*. В 1933 году Г.М. Голузин и В.И. Крылов [4] обобщили результат

Т. Карлемана на односвязные плоские области. Применительно к единичному кругу $U=\{z\in \mathbf{C}:\ |z|<1\}$ (кстати, именно этот случай рассмотрен в известной монографии И.И. Привалова ([9], гл. II, § 5) *формула Голузина – Крылова* заключается в следующем.

Пусть $E\subset \partial U=\{\varsigma\in \mathbf{C}: |\varsigma|<1\}$ – измеримое множество точек границы круга, имеющее положительную меру Лебега. Тогда для любой голоморфной в U функции f из класса Харди $H_1(U)$ и любой точки $z\in U$

$$2\pi i\cdot f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_E \frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}\left[\frac{e^{\varphi(\varsigma)}}{e^{\varphi(z)}}\right]^m d\varsigma\,. \qquad (*)$$

Здесь $\varphi(z)=p(z)+iq(z)$ -голоморфная в U функция («гасящая» функция), $p(z)$ – гармоническая в U функция, являющаяся решением задачи Дирихле для характеристической функции $\lambda_E(\varsigma)$ множества E:

$$\lambda_E(\varsigma)=\begin{cases}1, & \text{если}\ \varsigma\in E,\\ 0, & \text{если}\ \varsigma\in CE,\end{cases}$$

$q(z)$ – сопряжённая с $p(z)$ гармоническая функция.

Сходимость в (1) равномерна на компактах в U.

В 1958 г. Л.А. Айзенберг [1] ввёл в рассмотрение и исследовал классы Харди h_δ функций двух комплексных переменных, голоморфных в ограниченных выпуклых полных двоякокруговых областях (*областях Темлякова*). В дальнейшем В.П. Шейнов [11], опираясь на интегральное представление Темлякова I рода, установил для функций класса h_1 аналог формулы Голузина – Крылова.

В данной заметке автор, продолжая развитие теории интегральных представлений функций, голоморфных в круговых областях $D\subset\mathbf{C}^{\mathrm{n}}$ $(n\ge 2)$ класса Λ (см., напр., [5], [6], [7], [8]), рассматривает схожий круг вопросов для областей D. При этом оказалось возможным снять некоторые из ограничений, налагавшихся ранее на определение области $D\in\Lambda$.

2^0. В пространстве $\mathbf{R}^n$ вещественных переменных $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ рассмотрим $(n-1)$-мерный симплекс

$$\Delta = \{\tau : \tau_1 + \ldots + \tau_n = 1, \tau_1 > 0, \ldots, \tau_n > 0\}.$$

Переменное τ_1 будем далее линейно выражать через остальные: $\tau_1 = 1 - \tau_2 - \cdots - \tau_n$. Отметим, что Δ можно представить в виде $\Delta = \{\tau : \tau_1 = 1 - \tau_2 - \cdots - \tau_n, (\tau_2, \ldots, \tau_n) \in \Delta^*\}$, где

$$\Delta^* = \{0 < \tau_2 < 1, 0 < \tau_3 < 1 - \tau_2, \ldots, 0 < \tau_n < 1 - \tau_2 - \cdots - \tau_{n-1}\}.$$

Определение. Будем говорить, что *ограниченная* область $D \subset \mathbf{C}^n$, $n \geq 2$, есть *область класса* Λ (кратко $D \in \Lambda$), если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) Ограничена гладкой гиперповерхностью Γ, задающейся параметрически в виде

$$\Gamma = \left\{\varsigma \in \mathbf{C}^n \colon \varsigma_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau)\xi_\nu, \tau \in \Delta, \xi \in T, \mu = \overline{1,n}\right\}, \tag{1}$$

где $R_{\mu\nu}(\tau)$ $(\mu, \nu = \overline{1,n})$ непрерывно дифференцируемые на Δ функции, причём определитель $\det\limits_{\tau \in \Delta}\|R_{\mu\nu}(\tau)\| \neq 0$, а $T = \{\xi \in \mathbf{C}^n \colon |\xi_1| = 1, \ldots, |\xi_n| = 1\}$.

2) Представима в виде

$$D = \text{внутр.} \bigcap_{\tau \in \Delta} \left\{z \in \mathbf{C}^n \colon \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu |r_{\mu 1}(\tau)z_1 + \cdots + r_{\mu n}(\tau)z_n| < 1\right\}, \tag{2}$$

где $\|r_{\mu\nu}(\tau)\| = \|R_{\mu\nu}(\tau)\|^{-1}$ (обратная матрица).

Условие (2) свидетельствует о *выпуклости* области D, а условие (1) – о том, что D является *полной круговой областью с центром в начале координат*.

В записи гиперповерхности (1) условимся параметр ξ_1 обозначать через η, вместо ξ_ν, $\nu = \overline{2,n}$, введём новые (вещественные) параметры t_ν по формулам $\xi_\nu = \eta e^{-it_\nu}$ и введём формально параметр $t_1 \equiv 0$. Тогда в (1) $\varsigma_\mu = \varsigma_\mu(\tau, t, \eta) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau)\eta e^{-it_\nu}$, где $\tau \in \Delta$,

$$u = u(\tau, t, z) = \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \left(r_{\mu 1}(\tau) z_1 + \cdots + r_{\mu n}(\tau) z_n \right) e^{it_\mu} \quad \left(\nu = \overline{2,n}\right),\ |\eta| = 1 .$$

Обозначим

$$u = u(\tau, t, z) = \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu \left(r_{\mu 1}(\tau) z_1 + \cdots + r_{\mu n}(\tau) z_n \right) e^{it_\mu} \ , \tag{3}$$

$$\varsigma_\mu = \varsigma_\mu(\tau, t) = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau) e^{-it_\nu} \ , \ \hat{\lambda}_\nu = \hat{\lambda}_\nu(\tau, t) = \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu r_{\mu\nu}(\tau) e^{it_\mu} \ ,$$

$$\upsilon = \upsilon(\tau, t) = \begin{vmatrix} \hat{\lambda}_1 & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial \tau_2} & \cdots & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial \tau_n} & -\hat{\lambda}_1 & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_1}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\lambda}_n & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_n}{\partial \tau_2} & \cdots & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_n}{\partial \tau_n} & -\hat{\lambda}_n & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_n}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial \hat{\lambda}_n}{\partial t_n} \\ 0 & \dfrac{\partial \varsigma_1}{\partial \tau_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varsigma_1}{\partial \tau_n} & \varsigma_1 & \dfrac{\partial \varsigma_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varsigma_1}{\partial t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dfrac{\partial \varsigma_n}{\partial \tau_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varsigma_n}{\partial \tau_n} & \varsigma_n & \dfrac{\partial \varsigma_n}{\partial t_n} & \cdots & \dfrac{\partial \varsigma_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} .$$

Теорема 1 ([5], [6]). Пусть функция $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ голоморфна в области $D \in \Lambda$ и μ раз $(0 \le \mu \le n-1)$ непрерывно дифференцируема в $D \cup \Gamma$. Тогда для $k = 0, 1, \ldots, \mu$ и $z \in D$

$$f(z) = \frac{(n-k-1)!}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\tau \int \upsilon d\omega_t \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\eta^{n-k-1} f_k(\varsigma)}{(\eta - u)^{n-k}} d\eta , \tag{4}$$

где $\quad f_0(\varsigma) \equiv f(\varsigma), \quad f_k(\varsigma) = (n-k) f_{k-1}(\varsigma) + \eta \dfrac{\partial f_{k-1}(\varsigma)}{\partial \eta}, \quad k = \overline{1, \mu}$,

$$\int d\omega_\tau = \int\limits_{\Delta^*} d\tau_2 \cdots d\tau_n \ , \ \int d\omega_t = \int\limits_0^{2\pi} dt_2 \cdots \int\limits_0^{2\pi} dt_n \ .$$

Замечание 1. Используя дифференциальные операторы И.И. Баврина [3], $f_k(\varsigma)$ в формуле (4) можно представить как суперпозицию

$$f_k = L^{(k)}_{n-k,\, n-1}[f] = L_{n-1}\left[L_{n-2} \ldots \left[L_{n-k}[f]\right]\ldots\right]$$

операторов вида

$$L_p[f(z)] = pf + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$$

(при этом $L^{(o)}_{n,n-1}[f] \equiv f$, $L^{(1)}_{n-1,n-1}[f] \equiv L_{n-1}[f]$).

Замечание 2. В формуле (4) условие $f(z) \in A(D) \cap C^k(D \cup \Gamma)$ можно заменить на $f_k(z) \in A(D) \cap C(D \cup \Gamma)$.

Замечание 3. Класс Λ круговых областей D является обобщением введённого польскими математиками З. Опиалем и Й. Сицяком [13] класса n-круговых областей типа (T), совпадающих в случае $n = 2$ с двоякокруговыми областями Темлякова.

3^0. Функцию $f(z) \in A(D)$, $D \in \Lambda$, назовём функцией *класса Харди* $h_\delta(D)$ $(\delta > 0)$, если

$$\lim_{\rho \to 1} \int d\omega_\tau \int d\omega_t \int_0^{2\pi} |f(\rho\zeta)|^\delta \, d\theta < \infty ,$$

где $\rho\zeta = (\rho\zeta_1, \ldots, \rho\zeta_n)$, $\zeta_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\mu\nu}(\tau) e^{i(\theta - t_\nu)}$, $\mu = \overline{1,n}$.

Теорема 2. Для того, чтобы голоморфная в области $D \in \Lambda$ функция $f(z) \in h_\delta(D)$, необходимо и достаточно, выполнение следующих двух условий: 1) для почти всех (τ, t) (в смысле меры Лебега) функция $f(\varsigma(\tau,t,u)) \equiv f\left(\sum_{\nu=1}^{n} R_{1\nu}(\tau) u e^{-it_\nu}, \ldots, \sum_{\nu=1}^{n} R_{n\nu}(\tau) u e^{-it_\nu} \right)$ принадлежит классу Харди в единичном круге $|u| < 1$; 2) на гиперповерхности Γ функция $|f(z)|^\delta$ суммируема, т.е. $\int d\omega_\tau \int d\omega_t \int_0^{2\pi} |f(\rho\zeta)|^\delta \, d\theta < \infty$.

Докажем необходимость. Сравнение формул (2) и (3) показывает, что если точка $z \in D$, то $|u| < 1$, а при $z \in D \cup \Gamma$ $|u| \le 1$. Т.к. функция $f(z)$ голоморфна в области D, то $f(\varsigma(\tau,t,u))$ при всех (τ, t) является голоморфной функций переменного u в круге $|u|<1$. Как следует из граничных свойств голоморфных функций одного комплексного переменного, функция $\int_0^{2\pi}|f(\rho\zeta)|^{\delta}\,d\theta$ является неубывающей функцией от ρ при $0<\rho<1$. Отсюда, на основание известной леммы П. Фату ([9], с. 15), получаем

$$\lim_{\rho\to 1}\int d\omega_{\tau}\int d\omega_{t}\int_0^{2\pi}|f(\rho\zeta)|^{\delta}\,d\theta=\int d\omega_{\tau}\int\left\{\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}|f(\rho\zeta)|^{\delta}\,d\theta\right\}d\omega_{t}\ , \quad (5)$$

что доказывает необходимость условия 1). Из этой же леммы П. Фату следует и необходимость условия 2).

Достаточность. Пусть условия 1) и 2) выполнены. Тогда по теореме Ф. Рисса ([9], с. 89) для почти всех (τ,t) справедливо равенство

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi}|f(\rho\zeta)|^{\delta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left\{\lim_{\rho\to 1}|f(\rho\zeta)|^{\delta}\right\}d\theta\,,$$

с учётом которого мы можем переписать равенство (5) в виде

$$\lim_{\rho\to 1}\int d\omega_{\tau}\int d\omega_{t}\int_0^{2\pi}|f(\rho\zeta)|^{\delta}\,d\theta=\int d\omega_{\tau}\int d\omega_{t}\int_0^{2\pi}|f(\zeta)|^{\delta}\,d\theta\,.$$

Последнее равенство – в силу условия 2) – означает, что $f(z)\in h_{\delta}(D)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Утверждение теоремы 1 остаётся в силе и в той, более общей ситуации, если вместо непрерывности $f_k(z)$ в $D\cup\Gamma$ требуется лишь принадлежность $f_k(z)$ классу Харди $h_1(D)$.

Действительно, пусть $f_k(z)\in h_1(D)$. Представим $f(z)$ как предел равномерно сходящейся внутри D последовательности функций $\left\{f^{[m]}(z)\right\}$, где $f^{[m]}(z)=f\left[\left(1-\dfrac{1}{m}\right)z_1,\ldots,\left(1-\dfrac{1}{m}\right)z_n\right]$, $m=2,3,\ldots$, голоморфных в D, для которых $f_k^{[m]}(z)\in C(D\cup\Gamma)$. Записывая интеграл (4) для $f^{[m]}(z)$ и переходя к пределу при

$m \to \infty$, получаем формулу (4) для случая $f_k(z) \in h_1(D)$.

Будем далее понимать интегральную формулу (4) в указанном обобщённом смысле.

4^0. Отметим, что в случае $k = n-1$ формула (4) принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\tau \int \upsilon d\omega_t \int\limits_{|\eta|=1} \frac{f_{n-1}(\varsigma)}{\eta - u} d\eta, \tag{6}$$

примечательный тем, что последний внутренний интеграл здесь имеет ядро Коши относительно комплексного переменного u. Этой особенностью мы сейчас воспользуемся.

Теорема 3. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $D \in \Lambda$ и $f_{n-1}(z) \in h_1(D)$. Пусть далее $E(\tau, t, \eta)$ – измеримое подмножество гиперповерхности Γ, для которого почти при всех (τ, t) функция $\omega(\tau, t) = \int\limits_{|\eta|=1} \lambda_E(\tau, t, \eta) |d\eta|$ отлична от нуля ($\lambda_E(\tau, t, \eta)$ – характеристическая функция множества $E(\tau, t, \eta)$). Тогда для $z \in D$ справедлива формула

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^n i} \int d\omega_\tau \int \upsilon d\omega_t \int\limits_{E(\tau,t,\eta)} \frac{f_{n-1}(\varsigma)}{\eta - u} \cdot \left[\frac{e^{\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{e^{\varphi_{\tau,t}(u)}} \right]^m d\eta \tag{7}$$

(интеграл понимается в смысле Лебега), где «гасящая» функция $\varphi_{\tau,t}(u) = p_{\tau,t}(u) + i q_{\tau,t}(u)$ голоморфна в круге $|u| < 1$, $p_{\tau,t}(u)$ – гармоническая в том же круге функция, являющаяся решением задачи Дирихле для функции $\lambda_E(\tau, t, \eta)$ при каждых фиксированных (τ, t), а $q_{\tau,t}(u)$ – функция, гармонически сопряжённая с $p_{\tau,t}(u)$.

Доказательство. Опираясь на тот, отмеченный в ходе доказательства теоремы 2, факт, что если $z \in D$, то $|u| < 1$, а при $z \in D \cup \Gamma$ $|u| \le 1$, из формулы (6) на основании классической интегральной формулы Коши получаем:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int d\omega_\tau \int \upsilon\, f_{n-1}(\varsigma(\tau, t, u)) d\omega_t\ . \tag{8}$$

Далее, так как по условию $f_{n-1}(z)\in h_1(D)$, то, согласно теореме 2, для почти всех (τ,t) функция $f_{n-1}(\varsigma(\tau,t,u))\in H_1$ в круге $|u|<1$ и, следовательно, мы можем применить к ней формулу (*). В результате получаем, что для почти всех (τ,t)

$$f_{n-1}(\varsigma(\tau,t,u))=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)}{\eta-u}\cdot\left[\frac{e^{\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{e^{\varphi_{\tau,t}(u)}}\right]^m d\eta\,. \tag{9}$$

Поясним, что эта формула восстанавливает функцию $f_{n-1}(\varsigma(\tau,t,u))$ внутри круга $|u|<1$ по её граничным значениям на части окружности $|\eta|=1$.

Сравнение формул (8) и (9) даёт

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int d\omega_\tau\int \upsilon\left\{\lim_{m\to\infty}\int\limits_{E(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)}{\eta-u}\cdot\left[\frac{e^{\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{e^{\varphi_{\tau,t}(u)}}\right]^m d\eta\right\}d\omega_t\,. \tag{10}$$

Отметим, что интеграл

$$\int d\omega_\tau\int \upsilon d\omega_t\int\limits_{E(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)}{\eta-u}\cdot\left[\frac{e^{\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{e^{\varphi_{\tau,t}(u)}}\right]^m d\eta$$

существует – в силу измеримости подынтегральной функции.

Осталось показать, что в (10) возможен предельный переход под знаком интеграла. С этой целью оценим модуль разности

$$|\mathrm{J}|=\left|\begin{array}{l}\int d\omega_\tau\int \upsilon\, f_{n-1}(\varsigma(\tau,t,u))d\omega_t\,-\\ -\int d\omega_\tau\int \upsilon\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{E(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)}{\eta-u}\cdot\left[\frac{e^{\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{e^{\varphi_{\tau,t}(u)}}\right]^m d\eta\right\}d\omega_t\end{array}\right|\le$$

$$\le\int d\omega_\tau\int|\upsilon|\left|f_{n-1}(\varsigma(\tau,t,u))-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)}{\eta-u}\cdot\left[\frac{e^{\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{e^{\varphi_{\tau,t}(u)}}\right]^m d\eta\right|d\omega_t\,.$$

Заметим, что при выводе формулы (*) Г.М. Голузин и В.И. Крылов ([9], с. 106) получили её предельным переходом при $m\to\infty$ из следующего соотношения:

$$f(z)=e^{-m\varphi(z)}\frac{1}{2\pi i}\int_E\frac{f(\varsigma)e^{m\varphi(\varsigma)}}{\varsigma-z}d\varsigma+e^{-m\varphi(z)}\frac{1}{2\pi i}\int_{CE}\frac{f(\varsigma)e^{m\varphi(\varsigma)}}{\varsigma-z}d\varsigma .$$

Аналогом этого соотношения в нашем случае является

$$f_{n-1}(\varsigma(\tau,t,u))=e^{-m\varphi_{\tau,t}(u)}\frac{1}{2\pi i}\int_{E(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)e^{m\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{\eta-u}d\eta+ \\ +e^{-m\varphi_{\tau,t}(u)}\frac{1}{2\pi i}\int_{CE(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)e^{m\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{\eta-u}d\eta .$$

Производя подстановку в оценку для $|\mathrm{J}|$, получаем:

$$|\mathrm{J}|\le\int d\omega_\tau\int|\upsilon|\left|e^{-m\varphi_{\tau,t}(u)}\right|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{CE(\tau,t,\eta)}\frac{f_{n-1}(\varsigma)e^{m\varphi_{\tau,t}(\eta)}}{\eta-u}d\eta\right|d\omega_t\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int d\omega_\tau\int|\upsilon|\,e^{-mp_{\tau,t}(u)}\,d\omega_t\int_{CE(\tau,t,\eta)}\frac{|f_{n-1}(\varsigma)|\left|e^{m\varphi_{\tau,t}(\eta)}\right|}{|\eta-u|}|d\eta| .$$

Фиксируем точку u и обозначим $d=\min\limits_{|\eta|=1}|\eta-u|$. Тогда

$$|\mathrm{J}|\le\frac{1}{2\pi d}\int d\omega_\tau\int d\omega_t\int_{CE(\tau,t,\eta)}|\upsilon||f_{n-1}(\varsigma)|e^{-mp_{\tau,t}(u)}|d\eta|$$

(в последнем интеграле отсутствует $\left|e^{m\varphi_{\tau,t}(\eta)}\right|$, т.к. при всех (τ,t) гармоническая функция $p_{\tau,t}(\eta)$ обращается в нуль для любых $\eta\in CE(\tau,t,\eta)$, поскольку для этих значений η характеристическая функция $\lambda_E(\tau,t,\eta)=0$.

По построению $0<p_{\tau,t}(u)=\mathrm{Re}[\varphi_{\tau,t}(u)]<1$ и, следовательно,

1) $e^{-mp_{\tau,t}(u)}\to 0$ при $m\to\infty$, причём (в силу независимости $f_{n-1}(\varsigma)$ и υ от m) указанное стремление имеет место и для подынтегральной функции в целом;

2) $e^{-mp_{\tau,t}(u)}\le 1$, т.е. подынтегральная функция при любых m не превосходит функции $|\mathrm{v}f_{n-1}(\varsigma)|$, которая суммируема.

Но тогда, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, интеграл

$$\int d\omega_\tau \int d\omega_t \int\limits_{CE(\tau,t,\eta)} \left| \upsilon f_{n-1}(\varsigma) \right| e^{-mp_{\tau,t}(u)} \left| d\eta \right|$$

стремится к нулю при $m \to \infty$, т.е. $\mathrm{J} \to 0$ при $m \to \infty$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Для случая двоякокруговых областей Темлякова предложения, аналогичные теоремам 2 и 3, были ранее установлены в соответственно работах [1] и [11].

Литература.

1. Айзенберг Л.А. Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120, № 5. – С. 935 – 938.
2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. – Новосибирск: «Наука» (Сиб. отделение). – 1990. – 248 с.
3. Баврин И.И. Операторный метод в комплексном анализе. М.: «Прометей» МПГУ. – 1991. – 200 с.
4. Голузин Г.М., Крылов В.И. Обобщённая формула Carleman'a и её приложение к аналитическому продолжению функций // Матем. сб. – 1933. – Т. 40, № 2. – С. 144 – 149.
5. Нелаев А.В. Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных в круговых областях и некоторые их приложения // Монография. – М., МОПИ. – 1985. – 107 с. – Деп. в ВИНИТИ 20.08.1985, № 6123-В85.
6. Нелаев А.В. Интегральные представления в круговых областях // В межвуз. сб. научн. трудов «Комплексный анализ и его приложения». М.: «Прометей» МПГУ. – 1996. – С. 75 – 92.
7. Нелаев А.В. Многомерный аналог формулы Карлемана для круговых областей из $\mathbf{C}^n$ // В межвуз. сб. научн. трудов «Математический анализ». М.: «Прометей» МПГУ. – 1998. – С. 89 – 105.
8. Нелаев А.В. Преобразования интегральных представлений голоморфных функций многих комплексных переменных // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов/

под ред. Г.Ю. Ризниченко. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – Вып. 9. – Ч. 2. – С. 584 – 596.

9. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
10. Темляков А.А. Интегральные представления функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120, № 5. – С. 976 – 979.
11. Шейнов В.П. Распространение формулы Крылова – Голузина на случай двух комплексных переменных // Учён. зап. МОПИ. – М., 1962. – Т. 110.- С. 133 – 139.
12. Carleman T. Les functions quasianalytiques. – Paris, 1926. – 116 p.
13. Opial Z., Siciak J. Integral formulas for functions holomorphic in convex n-circular domains // Zesz. Nauk. Univ. Jagiell. – 1963. – V. 9, № 77. – P. 67 – 75.