МАТРОИДНАЯ РЕШЕТКА ПОДАЛГЕБР А-СИСТЕМЫ*

Граев М. И., Коганов А. В.

(Россия, Москва)

Характеристическим свойством системы подпространств в линейных пространствах является матроидность (в другой терминологии полумодулярность и атомарность) образованной ими решетки по частичной упорядоченности вложенности. Предлагается метод построения в произвольной алгебре универсального типа системы подалгебр, с этим свойством. В частном случае линейного или аффинного пространства возникает обычная решетка подпространств. Таким образом, эта конструкция обобщает понятие подпространства в линейной алгебре и проективной геометрии.

1. Введение

Система подпространств линейного или проективного пространства и система К-плоскостей аффинного пространства образуют матроидную решетку [1]. В последние годы проведены исследования [5–7] вопроса, насколько это свойство может быть распространено на подалгебры алгебр универсального типа (А-системы), которые определяются множеством элементов (носителем) $\boldsymbol{U}$ и множеством $\boldsymbol{F}$ операций различной арности. Решетка всех подалгебр в общем случае — не матроид. Для особого класса алгебр (матроидные А-системы) в [6, 7] были определены подалгебры специального вида (плоские множества и плоскости), образующие матроид. Но в общем случае проблема определения матроида подалгебр, обобщающего понятие линейных подпространств, оставался открытым. Данная работа дает одно из возможных решений этой проблемы.

2. Основные определения и постановка задачи

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Определения и термины, относящиеся к решеткам и матроидам, соответствуют изданиям [1, 2, 9]. Определения, относящиеся к А-системам частично являются переформулировкой терминов из [4, 8], а частично введена авторами [5–7]. Изменения вызваны некоторой неоднозначностью традиционной терминологии в контексте задач, решаемых в данном цикле работ.

2.1. *Решеткой* называется частично упорядоченное множество $(X|\leq)$, на котором для любых $x,y\in X$ кроме рефлексивного и транзитивного отношения порядка $\leq$ определены две операции: *конъюнкция* $x\wedge y=\max\{c|c\leq x\&c\leq y\}$, и *дизъюнкция* $x\vee y=\min\{c|x\leq c\&y\leq c\}$.

Кроме того, вводятся вспомогательные отношения *строго меньше* и *равно*:
$x<y \Leftrightarrow x\leq y\ \&\ \neg(y\leq x)$ и $x=y \Leftrightarrow x\leq y\ \&\ y\leq x$.

2.2. Элемент решетки x *покрывает* подмножество решетки Y, если для каждого $y\in Y$ выполнено $y<x$ и в решетке нет элемента z, удовлетворяющего неравенствам $y<z<x$ для каждого $y\in Y$. Обозначение $Y<<x$.

2.3. Решетка X называется полумодулярной, если на ней из условий $a<<x$, $a<<y$, $\{x;y\}<<z$, где $a,x,y,z\in X$, следует $x<<z\ \&\ y<<z$.

2.4. Решетка X называется *атомарной*, если в ней есть минимальный элемент $\varnothing=\min(X)$ и подмножество элементов (*атомов*) вида $A=\{a|a\in X,\varnothing<<a\}$ обладает свойством: если $x,y\in X$ и $x\neq y$, то $A(x)=\{z|z\in A,z\leq x\}\neq A(y)$.

2.5. Решетка называется *матроидом*, если она атомарная и полумодулярная.

2.6. **Пример матроида** — решетка $S(\mathbf{R}^n)$ подпространств линейного пространства $\mathbf{R}^n$, в которой упорядоченность определяется вложением: для двух подпространств $x,y\in S(\mathbf{R}^n)$ отношение $x\leq y$ означает $x\subseteq y$. Тогда минимальный элемент — это точка $0\in\mathbf{R}^n$, атомы — это прямые, одномерные подпространства $L\{v\}=\{rv|r\in\mathbf{R}\}$ для всех $v\in\mathbf{R}^n$. Любое k-мерное подпространство однозначно определено множеством прямых, содержащихся в нем. Для двух подпространств $x,y\in S(\mathbf{R}^n)$ свойство $y<<x$ означает $y\subset x$ и $\dim(x)=\dim(y)+1$. Тогда для элементов, указанных в определении 2.3, можно выбрать такие базисы в подпространствах, что $a=L\{v_1,\ldots,v_k\}$, $x=L\{v_1,\ldots,v_k,p\}$, $y=L\{v_1,\ldots,v_k,q\}$,

$z=L\{v_1,\ldots,v_k,p,q\}$, где $v_1,\ldots,v_k,p,q\in\mathbf{R}^n$. Свойство полумодулярности следует из этого представления непосредственно.

2.7. **Пример матроида** — решетка $S(\mathbf{R}^n{}_{aff})$ k-плоскостей аффинного пространства $\mathbf{R}^n{}_{aff}$, в которой упорядоченность определяется вложением: для двух k-плоскостей $x,y\in S(\mathbf{R}^n)$ отношение $x\leq y$ означает $x\subseteq y$. Минимальный элемент — пустое множество. Атомы — точки (0-плоскости). Полумодулярность устанавливается аналогично примеру 2.6.

2.8. Назовем А-системой (U|F) кортеж, состоящий из множества U значений операндов (носитель А-системы) и множества F определенных на нем операций, имеющих различную арность (сигнатура А-системы). Сигнатура может быть представлена в форме $F=\cup_{m=0,\ldots\infty}F_m$, где F_m состоит из всех операций арности m, т.е. $f\in F_m \Rightarrow f{:}U^m\rightarrow U$.

Класс всех А-систем называется универсальной алгеброй. Нульарные операции рассматриваются, как создание в А-системе выделенных элементов (например, единица в группе), на которые накладываются особые условия. Одноарные операции являются отображениями носителя в себя.

2.9. Назовем F-подмножеством А-системы подмножество носителя, замкнутое относительно применения всех операций из сигнатуры. Если V — F-подмножество, и $f\in F_m$, то $f{:}V^m\rightarrow V$. Для каждого $V\subset U$ определено минимальное F-подмножество U(V), содержащее его.

2.10. **Примеры А-систем**. Линейное пространство является А-системмой, если в качестве носителя принять множество векторов $\mathbf{R}^n$, а в качестве операций сложение (арность 2) и умножение на число (каждому числу соответствует своя операция арности 1). F-подмножества — это подпространства.

Аффинное пространство является А-системой с носителем $\mathbf{R}^n$ и бинарными операциями $f_a(x,y)=ax+(1-a)y$, где $a\in\mathbf{R}$, $x,y\in\mathbf{R}^n$ (барицентрическая сумма). F-подмножества — это k-плоскости. Можно ввести также барицентрические суммы высших арностей, без изменения набора F-подмножеств:

$$f_{a(1),\ldots,a(m)}(x_1,\ldots,x_{m+1})=a(1)x_1+\ldots+a(m)x_m+bx_{m+1},$$
$$b,a(1),\ldots,a(m)\in\mathbf{R},\ b+a(1)+\ldots+a(m)=1.$$

Выше было показано, что решетки F-подмножеств в этих алгебрах матроиды.

2.11. В любой А-системе F-подмножества образуют решетку по вложению, которую назовем *F-решеткой*. Каждое F-подмножество является объединением F-подмножеств вида U({x}), $x \in U$. Но, в общем случае, F-решетка не будет матроидом.

В качестве примера рассмотрим множество натуральных чисел с одной операцией: f(x)=x+1. F-подмножества имеют вид {x; x+1;…}=U({x}). Тогда U({x+1})$\subset\neq$ U({x}), и минимальный элемент $\varnothing$ нет имеет покрытия. Атомарность F-решетки нарушена.

Рассмотрим А-систему из трех элементов с носителем U={a;b;c} и одной унарной операцией f(a)=b, f(b)=b, f(c)=c. Получаем атомарную F-решетку без полумодулярности

$\varnothing$<{c}<{a,b,c}, $\varnothing$<{b}<{a;b}<{a,b,c}.

Верно {{b}{c}}<<{a;b;c}, но не верно b<<{a;b;c}.

2.12. Целью статьи является обобщение понятия k-плоскости на произвольную А-систему, с сохранением следующих свойств. Потребуем, чтобы каждое из выделяемых подмножеств носителя было F-подмножеством, а в совокупности они образовывали матроид. При этом для линейных, проективных и аффинных пространств этот матроид должен совпадать с матроидами подпространств и k-плоскостей.

Поставленная задача заведомо разрешима, поскольку в любой F-решетке содержится вырожденный матроид {$\varnothing$<U}. Ниже дается решение, позволяющее в каждой А-системе построить в некотором смысле наибольший матроид.

3. Системы подмножеств носителя А-системы

3.1. Определения. Назовем *системой подмножеств* набор подмножеств носителя А-системы, в котором каждый элемент носителя принадлежит хотя бы одному подмножеству. Заметим, что стандартный термин из теории множеств "покрытие носителя" неудобен в сочетании с терминологией теории решеток.

Монотонное преобразование системы подмножеств — это отображение h системы подмножеств X в систему подмножеств Y, при котором $x \subset h(x)$ для каждого $x \in X$ и если $x,y \in X$, то $h(x \cap y)=hx \cap hy$.

Последовательность систем подмножеств $S_1,S_2...$ *монотонная*, если для каждого натурального i существует монотонное преобразование $h_i:S_i \to S_{i+1}$.

Для каждой монотонной последовательности $S=(S_1,S_2...)$ определен *индуктивный предел* $\mathrm{ind}\ \lim_i S_i$ как система подмножеств H(S), состоящая из всех подмножеств вида

$$H(x)=\cup_{i\to\infty} h_i h_{i-1}...h_1(x),\ x\in S_1.$$

В силу монотонности всех h_i объединяется неубывающая по вложению последовательность множеств, и поэтому H является монотонным преобразованием системы подмножеств S_1.

3.2. Специальные монотонные операторы необходимые для формирования матроида подмножеств А-системы.

3.2.1. Скажем, что на системе подмножеств S задан (неориентированный) граф, если выделены некоторые (неупорядоченные) пары элементов системы. Вершинами графа являются все подмножества, входящие в систему, а ребрами — указанные пары. Связная компонента графа определяется как максимальный набор вершин, в котором между любыми двумя вершинами имеется путь по ребрам. Граф может иметь одну или более связных компонент.

Монотонный преобразование *кластеризации по графу* G системы подмножеств S определено как отображение каждого подмножества X из системы в объединение всех подмножеств связной компоненты G(X), содержащей X. Образ системы обозначим $\kappa[G]S=\{\cup\{Y|Y\in G(X)\}|X\in S\}$.

3.2.2. Монотонное преобразование алгебраического замыкания системы подмножеств: каждое подмножество системы отображается в свое алгебраическое замыкание по операциям сигнатуры. Обозначение: $\varphi S=\{U(X)|X\in S\}$.

3.2.3. Пусть заданы две системы подмножеств S и Q. Монотонное преобразование $\varepsilon[Q]S$ расширения элементов системы S по системе Q для каждого $X\in S$ определим уравнением:

$$\varepsilon[Q](X)=\cup\{\cap\{Z|Z\in Q,V\subset Z\}|V\subset X\}.$$

Поскольку каждый элемент X включен в некоторый элемент системы Q, то $X\subset\varepsilon[Q](X)$.

4. Условие матроидности системы подмножеств

Теорема 1. Система подмножеств M является матроидом F-множеств в упорядоченности вложения и с конъюнкцией равной пересечению подмножеств тогда и только тогда, когда ее можно разбить на конечное или бесконечное множество систем подмножеств $M_1, M_2,...,M_+$, где:

1) $M_+=\{U\}$, т.е. состоит из одного подмножества (весь носитель А-системы);

2) M_1 является разбиением U на F-множества;

3) для $n>1$ M_n обладает свойствами:

3a) если $V \in M_n$, то это F-множество ($U(V)=V$);

3b) если $V \in M_n$, то существуют $B \in M_{n-1}$, $A \in M_1$, $A \not\subset B$, такие что $V=\cap\{W|B \cup A \subset W, W \in M\}$; причем для любой пары $B \in M_{n-1}$, $A \in M_1$ существует такое $V \in M_n$;

3c) для любых $V,W \in M_n$ либо $V \cap W \in M_k$ для некоторого $k<n$, либо $V \cap W=\varnothing$.

Доказательство. Необходимость. В матроиде должен быть наибольший элемент. Для системы подмножеств это может быть только весь носитель (условие 1). Каждый атом должен покрывать пустое подмножество. Это означает, что пересечение различных атомов пусто. Поэтому множество атомов M_1 является разбиением (условие 2). Матроид всегда разбит на уровни, каждый из которых состоит из подмножеств, покрывающих подмножества предыдущего уровня. Нижний уровень — атомы. Множество M_n можно определить, как элементы покрывающие подмножества из M_{n-1}. Тогда каждое подмножество $V \in M_n$ содержит некоторое объединение множества $B \in M_{n-1}$ и атома (условие 3b). В этом случае конъюнкция любых двух подмножеств одного уровня должна лежать на нижних уровнях (условие 3c). Требование 3a входит в условие теоремы. Достаточность. По условиям 2 и 3a все подмножества системы M являются F-множествами. По условию 3b каждый элемент любого уровня, кроме M_+, имеет покрытие на следующем уровне. По условию 3b любой элемент M_n однозначно определен любой парой $B \in M_{n-1}$, $A \in M_1$. Тогда по индукции получаем, что каждый элемент M (кроме U) однозначно определен цепочкой последовательно добавляемых атомов, начиная с уровня M_1. Элемент U единственный, содержащий все атомы.

Докажем полумодулярность. Если на решетке M выполнено $z<<x$ и $z<<y$, то по условию 3b имеются атомы $a,b \in M_1$, такие, что x,y минимальные множества из M, содержащие, соответственно, $z \cup a$ и $z \cup b$. Но тогда множество q следующего уровня,

минимальное из содержащих $z\cup a\cup b$, одновременно покрывает $\{x;y\}$, x и y. Любое другое подмножество, покрывающее $\{x;y\}$, будет содержать $z\cup a\cup b$, и по условию минимальности совпадет с q. Все условия матроида выполнены.

5. Построение матроида F-множеств

5.1. Определение стандартных типов графов на системах подмножеств, котрые используются в конструкции матроида. Обозначим S произвольную систему подмножеств.

5.1.1. Тип GI(S), граф пересечений подмножеств. Ребро (A,B), $A,B\in S$, означает $A\neq B \& A\cap B\neq\varnothing$.

5.1.2. Тип GI(S|T,Q), где T, Q — две системы подмножеств, граф мажоритарных пересечений над T,Q. Ребро (A,B), $A,B\in S$, означает $A\neq B$ & $A\cap B\supset X\cup Y$, $X\in T$, $Y\in Q$.

5.1.3. Введем обозначение, относящееся к последовательности систем подмножеств M_1, M_2,..., входящих в матроид по теореме 1. Если $X\in M_n$, $Y\in M_k$, $X\cap Y=\varnothing$, $X\cup Y\notin M_{n+k-1}$, то $Z=X\cup Y$ будем обозначать $Z=X+^{n}{}_{k}Y$. Это обозначение означает выполнение указанных условий для X,Y,Z.

5.2. Построение матроида в форме системы множеств, соответствующей теореме 1.

5.2.1. M_1=ind $\lim_k M_1(k)$,
где $M_1(0)=\{\{x\}|x\in U\}$, $M_1(k+1)=\varphi\kappa[GI(M_1(k))]M_1(k)$

5.2.2. M_n=ind $\lim_k M_n(k)$,
где $M_n(0)=\{B\cup A|B+^{n-1}{}_{1}A\ \}$, $M_n(k+1)=\varphi\varepsilon[S_{n-1}]\kappa[GI(Q)]M_n(k)$,
$S_{n-1}=M_1\cup...\cup M_{n-1}$; $Q= M_n(k)|M_{n-1},M_1$

Операторы, формирующие последовательности $M_n(k)$ при каждом n=0,1,… являются монотонными отображениями систем множеств $M_n(k-1)$, и поэтому индуктивные пределы корректны.

5.3. **Теорема 2**. Процесс 5.2 порождает матроид F-множеств в любой A-системе.

Доказательство. Проверка свойств, определенных в теореме 1, для построенной системы подмножеств M. Подсистемы M_n будем называть уровнями M с номером n. Элемент монотонной последовательности $M_n(k)$ назовем этапом k уровня n.

Свойство 1. Уровень M_+ вводится в систему подмножеств независимо от того, возник ли такой уровень с конечным номером.

Свойство 2. Допустим, что на уровне M_1 имеется два подмножества $A,B\in M_1$, $C=A\cap B\neq\varnothing$. Поскольку каждое из подмножеств A и B является индуктивным пределом растущей последовательности подмножеств A_k и B_k, то начиная с некоторого этапа k уровня 1, имеется непустое пересечение $A_k\cap B_k$. Но тогда на следующем этапе эти подмножества будут объединены в одной связной компоненте графа пересечений, и на следующем этапе эти множества будут объединены монотонным отображением $\kappa[M_1(k)]$. Это означает $A_{k+t}=B_{k+t}$, и A=B. Следовательно, M_1 является разбиением.

Свойство 3a. В монотонных последовательностях п. 5.2.1 и п. 5.2.2 на каждом этапе применяется монотонное отображение φ. Это означает, что любое подмножество любого элемента системы подмножеств каждого этапа содержит алгебраическое замыкание. На последующих этапах это замыкание сохраняется в составе расширенного подмножества. Значит, в индуктивном пределе каждое результирующее подмножество содержит его алгебраическое замыкание.

Свойство 3b. Для уровня M_1 условие выполнено тривиально при пустом B.

По п.5.2.2 на уровне M_n нулевой этап обеспечивает включение в каждый элемент из $M_n(0)$ объединения $B\cup A$. Это объединение не может содержаться в подмножествах меньших уровней, т.к. это противоречит определению B в форме индуктивного предела. Если такое объединение входит в некоторое $B'\in M_{n-1}$, то $B\cap B'\neq\varnothing$, и B по построению включает некоторое $C\in M_{n-2}$, а это означает, что B и B' входят в одну компоненту связности и поэтому B=B'. Но тогда $A\subset B$, что противоречит условию выбора. Все множества последующих уровней получены из уровня n монотонным отображением. Если два множества уровня n содержат $B\cup A$, то они войдут в одну компоненту связности этого уровня, и, следовательно, объединены в одно множество. Поэтому то множество уровня n, которое содержит $B\cup A$, является наименьшим в M с этим свойством.

Свойство 3c. Рассмотрим действие оператора $\varepsilon[S_{n-1}]$ в рекуррентной формуле п. 5.2.2. Любой элемент $V\in M_n$ вместе с каждым подмножеством $w\subset V$ содержит пересечение D(w) тех элементов более низких уровней, которые содержат w. Докажем по индукции, что это пересечение является элементом одного из уровней. Если $w \subset B$, $B \in M_1$, то $D(w)=B$. Пусть доказано, что если $w \subset B$, $B \in M_i$, то $D(w) \in S_i$. Предположим, что $w \subset B$, $B \in M_{i+1}$. Если $w \subset B$, $B_o \in M_j$, $j \leq i$, то по предположению индукции $D(w) \in S_j$, а значит $D(w) \in S_i$. Допустим $w=p \cup q$, где $p \subset B$, $B \in M_j$, $p \cap q=\varnothing$, $q \neq \varnothing$. Если $j<i$, то рассмотрим произвольный $x \in q$. Построим $p'=p \cup \{x\}$ и $q'=q \setminus \{x\}$. $D(p)=B \in M_j$, $D(\{x\})=A \in M_1$. Значит $D(p')=D(B \cup A)$. Но $B \cup A$ порождает единственный элемент $B'=D(p') \in M_{j+1}$. Если $j+1=i$, то $B'=B_o$, и тогда $q'=\varnothing$. Если $j+1<i$, то возможно $q' \neq \varnothing$. В этом случае, повторив тот же процесс, получим новое разложение $w=p \cup q$, где $D(p) \in M_{j+2}$. Процесс продолжается до тех пор, пока не возникнет $q=\varnothing$. Это произойдет при некотором $j \leq i$, поскольку при $j=i$ как показано выше $D(p)=B_o$. При том j, при котором $q=\varnothing$, $D(p)=D(w) \in M_j$. Индукция завершена. Из доказанного следует, что пересечение любых двух подмножеств – элементов системы подмножеств М является элементом этой системы. Это соответствует свойству 3с.

5.4. Определение. Матроид, построенный в п. 5.2, назовем *стандартным* для данной А-системы.

6. Свойства стандартного матроида

Стандартный матроид обладает некоторыми экстремальными свойствами среди матроидов F-множеств, которые имеются в данной А-системе.

6.1. Если S некоторая система подмножеств, то для произвольного $X \subset U$ обозначим $S(X)=\{V|V \in S, X \subset V\}$. Возможно, $S(X)=\varnothing$ для некоторых X.

Теорема 3. В произвольной А-системе стандартный матроид может быть монотонно преобразован (в смысле определения п. 3.1) в любой другой матроид этой А-системы.

Доказательство. Пусть M’ — некоторый матроид А-системы, а M — стандартный матроид. Обозначим искомое преобразование h. По теореме 1 $M'=M'_+ \cup M'_1 \cup \ldots$, причем $M'_+=M_+=U$. Положим $hU=U$. Это монотонное преобразование M_+. Уровень M'_1 содержит атомы M’. Каждый атом является F-множеством, т.е. если $A \in M'_1$, то $U(A)=A$. Уровень M'_1 — разбиение U, поэтому, если $x,y \in U$ и $U(\{x\}) \cap U(\{y\}) \neq \varnothing$, то x и y принадлежат одному атому. Но это единственное условие, по которому объединялись элементы в атомы M_1. Поэтому, если x и y принадлежат одному атому системы M, то они входят и в один атом системы M’. Положим $hM_1(\{x\})=M'_1(\{x\})$ для всех $x\in U$. По доказанному, это монотонное преобразование системы M_1. Предположение индукции: для всех i=1,...,n-1 доказано, что имеется монотонное преобразование всей совокупности уровней, расслоенное по уровням: $h:M_i\to M'_i$. Рассмотрим M'_n. Пусть имеется $C\in M'_n(B+^{n-1}{}_1A)$ в обозначениях п.5.1.3 относительно M.

Тогда все $M_n(k)(B+^{n-1}{}_1A)\subset C$ для k=0,1,... , поскольку эти множества возникают как расширения с учетом необходимых условий для элемента матроида по теореме 1. Значит, $M_n(B+^{n-1}{}_1A)\subset C$. Докажем, что C существует. По предположению индукции и по условию 3c теоремы 1 в M’ существует элемент $M'_n(hB\cup hA)$, который в силу монотонности h содержит $B\cup A=B+^{n-1}{}_1A$. Этот элемент можно принять в качестве C и определить $h\,M_n(B+^{n-1}{}_1A)=M'_n(hB\cup hA)$. Индукция завершена.

6.2. Пример. Рассмотрим пространство $U=\mathbf{R}^3$ в качестве носителя A-системы. Сигнатура F состоит из бинарных функций $f_a(x,y)=ax+(1-a)y$, для каждого действительного числа $a\in\mathbf{R}$ и пары векторов $x,y\in U$. Это алгебраическая форма аффинного пространства. Стандартный матроид M состоит из уровней: $\varnothing$, все точки $U(M_1)$, все прямые в $U(M_2)$, все плоскости в $U(M_3)$, все $U(M_{\geq 4})$. Можно построить другой матроид M’ с уровнями: $\varnothing$, все прямые, параллельные одной заданной (M'_1), все плоскости, в которых один направляющий вектор (главный) коллинеарен заданной прямой (M'_2), все $U(M'_{\geq 3})$. Монотонное преобразование $h:M\to M'$, построенное по теореме 3, выглядит так: точка из M_1 отображаются в прямую из M'_1; прямая из M_2 отображается в плоскость из M'_2, в которой она лежит, порожденную этой прямой и главным вектором, плоскость из M_3 отображается в $U(M'_3)$, и остальные отображения тождественные $U\,|\to U$.

7. Понятие ранга элемента матроида

В примере п. 6.2 было показано, что в аффинном пространстве разным уровня матроида соответствуют элементы разной евклидовой размерности. При этом в стандартном матроиде M номер уровня элемента на 1 больше его размерности, а в другом матроиде M’ разрыв составил 2. Это позволяет рассмотреть номер уровня как аналог размерности подпространства в алгебрах линейного типа.

7.1. **Определение 7.1.1**. Пусть на А-системе задан некоторый матроид M'. Рангом r(V) элемента V матроида M' назовем номер n уровня M'_n к которому отнесен V.

Заметим, что ранг зависит от того, в каком матроиде рассматривается данное множество. Но, учитывая теорему 3, можно говорить о стандартном ранге множества, если оно входит в стандартный матроид.

Утверждение 7.1.1. Каждое множество ранга n однозначно определяется в стандартном матроиде по n содержащимся в нем атомам как покрытие этой совокупности атомов. *Доказательство*. Индукция. Для $M_o=\varnothing$ и уровня атомов M_1 утверждение очевидно. Предположение: Для каждого подмножества $V\in M_i$, $i=1,...,n-1$, имеется набор атомов $A_1\subset V,...,A_i\subset V$, такой, что $V>>\{A_1;...;A_i\}$, и это единственное такое покрытие. Пусть $V\in M_n$. Тогда $V=M_n(W+^{n-1}{}_1A)>>\{W;A\}$. По предположению $W>>\{A_1;...;A_{n-1}\}$. Но тогда $V>>\{A_1;...;A_{n-1};A\}$. Если имеется еще одно подмножество $V'\in M_n$, $V>> W+^{n-1}{}_1A$, то действие оператора κ в рекуррентной формуле п. 5.2.2 должно при некотором k объединить V и V' в одной компоненте связности графа мажоритарных пересечений. Но тогда V=V'. Индукция завершена.

Определение 7.1.2. Матроидным базисом элемента стандартного матроида ранга n назовем любое множество, состоящее ровно из n атомов, определяющее этот элемент как свое покрытие.

7.2. **Теорема 4**. Для любых двух элементов V, W стандартного матроида M

$$r(V\vee W)=r(V)+r(W)-r(V\wedge W);$$
$$r(V\wedge W)\le\min\{r(V);r(W)\}.$$

Доказательство. По определению решетки системы подмножеств $D=V\wedge W=V\cap W$. Пусть r(V)=n, r(W)=m, r(D)=k. По утверждению 7.1 имеются матроидные базисы $B(V)=\{v_1;...;v_n\}$, $B(W)=\{w_1;...;w_m\}$, $B(D)=\{d_1;...;d_k\}$. Докажем по индукции, что можно выбрать базисы вида $B(V)=\{v_1;...;v_{n-k};d_1;...;d_k\}$ и $B(W)=\{w_1;...;w_{m-k};d_1;...;d_k\}$. Тогда утверждение следует из того, что $V\vee W>>\{v_1;...;v_{n-k};w_1;...;w_{m-k};d_1;...;d_k\}$ и $k\le\min\{n;m\}$. Индукция по значению n-k=L' для B(V). При L'=0 утверждение очевидно. Пусть искомый базис строится для L'<L. Рассмотрим

L'=L. Обозначим $Q \in M_{n-1}(v_1;...;v_{L-1};d_1;...;d_k)$, что возможно по предположению. Тогда $V \setminus Q \neq \varnothing$ и следовательно есть $x \in V \setminus Q$. Обозначим $v=M_1(\{x\})$. По построению $V \supset M_n(Q+^{n-1}{}_1 v)$. И так как $V \in M_n$, то $V=M_n(Q+^{n-1}{}_1 v)$. Мы построили $B(V)=\{v_1;...;v_{L-1};v;d_1;...;d_k\}$. Индукция завершена.

Замечание 7.2.1. Доказанное равенство рангов обобщает известное для пространств линейного типа равенство размерностей К-плоскостей и подпространств:

$\dim(P \oplus Q)=\dim(P)+\dim(Q)-\dim(P \cap Q)$,

где $\oplus$ — знак линейного замыкания объединения подмножеств.

Замечание 7.2.2. Для линейного пространства, традиционно, сигнатура имеет вид: $F=\{(.+.)\} \cup \{f_\beta(.) | \beta \in \mathbf{R}\}$, где x+y — сумма векторов x,y; $f_\beta(x)=\beta x$ — умножение вектора x на число β.

В такой сигнатуре стандартный матроид тривиален, поскольку все подпространства пересекаются в 0 и единственный атом — все подпространство. По теореме 3 тогда других матроидов нет.

Нетривиальный стандартный матроид всех ненулевых подпространств в линейных пространствах появляется, если формально отождествить F-множество {0} с пустым множеством $\varnothing$.

Список литературы:

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. М. "Наука". 1982. 558 с.
2. Биркгоф Г. Теория решеток. М. "Наука". 1984. 568 с.
3. Boruvka. Grundlagen der gruppoid-und gruppenteoria. Berlin. 1966. 198 c.
4. Кон П. Универсальная алгебра. М."Мир". 1968. 351 с
5. Граев М.И., Коганов А.В. Геометрические и топологические структуры на группоидах.М. НИИСИ РАН. 2002. 50 с..
6. Граев М.И., Коганов А.В. Геометрические и топологические структуры, связанные с универсальными алгебрами. Доклады РАН. т.392, 2003.
7. Graev M., Koganov A., Geometric and topological structures associated to universal algebras. Russian Journal of math. Phys. v.10. 2003 . pp.31-60
8. Курош А., Лекции по общей алгебре. М."Мир". 1973. 399 с.
9. Stern M., Semimodular lattices: theory and applications. Cambridge. 1999. 370 p.\bibitem{St} 10. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М."Мир". 1990. 440 с

Граев М. И., Коганов А. В. — МКО — 2005, ч. 1, стр. 733 – 745
Graev M. I., Koganov A. V. — MCE — 2005, vol. 1, p. 733 – 745

MATROID LATTICE OF A-SYSTEM SUBALGEBRAS

Graev M. I., Koganov A. V.

(Russia, Moscow)

Characteristic property of subspace system in linear spaces is matroid (in other terminology semimodularity and atomicity) lattice, formed by them, on partial order of an enclosing. The method of construction of system subalgebras in any algebra of a universal type, with this property is offered. In that specific case of linear or affine space there is a usual subspace lattice. Thus, this design generalizes concept subspace in linear algebra and projective geometry.