

## О НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭКМАНОВСКОГО ТИПА

Гаврилова Л. В., Гапеева Т. В., Компаниец Л. А.

(Россия, г. Красноярск)

*Впервые аналитическое решение для упрощенной трехмерной модели ветрового стационарного движения однородной жидкости было найдено Экманом для случая постоянного коэффициента турбулентного обмена и условия прилипания на дне. Нами найдено аналитическое решение этой модели в следующих случаях:*

*–если коэффициент турбулентного обмена постоянный, на дне ставится условие проскальзывания;*

*–если параметр Кориолиса равен 0, то решение найдено в случае условий прилипания и проскальзывания на дне и произвольного коэффициента турбулентного обмена (ранее было известно решение для случая линейного и экспоненциального распределения коэффициента турбулентного обмена по глубине и условия прилипания на дне).*

1. Ветровое движение жидкости в замкнутом водоеме описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - lv &= \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial u}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu &= \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $u = u(t, x, y, z)$ ,  $v = v(t, x, y, z)$ ,  $w = w(t, x, y, z)$  – компоненты вектора скорости течения  $\bar{V} = (u, v, w)$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $l$  – параметр Кориолиса;  $K$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $K = K(t, x, y, z)$ ;  $\eta = \eta(t, x, y)$  –

отклонение поверхности жидкости от равновесного положения. Ось  $z$  направлена вертикально вверх.

На водной поверхности (считаем, что граничные условия рассматриваются для  $z^0 = 0$ )

$$K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_1, \quad K \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_2. \quad (2)$$

На дне  $z = -h(x, y)$  ставятся условия проскальзывания для горизонтальных скоростей:

$$K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-h} = k_b u, \quad K \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-h} = k_b v, \quad (3)$$

$k_b = \infty$  отвечает условию прилипания на дне.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} W = u + iv \\ \frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + i \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \tau = \tau_1 + i \tau_2 \end{cases} \quad (4)$$

Для случая  $k_b = \infty$  известно точное решение, выписанное в [1]:

$$W = \frac{\tau}{\sqrt{ilK}} \frac{\sinh \sqrt{\frac{il}{K}}(h+z)}{\cosh \sqrt{\frac{il}{K}}h} - \frac{ig}{l} \left( \frac{\cosh \sqrt{\frac{il}{K}}z}{\cosh \sqrt{\frac{il}{K}}h} - 1 \right) \frac{\partial \eta}{\partial n}. \quad (5)$$

В [2] выписано уравнение для функции тока  $\Psi$  при  $h = const$  и  $K = const$ , позволяющее найти наклоны уровня свободной поверхности, входящие в (5) как параметр:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \frac{1}{l} (G \operatorname{rot} \tau + J \operatorname{div} \tau) \\ \operatorname{rot} \tau &= \frac{\partial \tau_2}{\partial x} - \frac{\partial \tau_1}{\partial y}, \quad \operatorname{div} \tau = \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y}, \\ G &= C + \frac{F}{E} D, \quad J = D - \frac{F}{E} C. \end{aligned} \quad (6)$$

Если  $h \neq const$  и  $K = const$ , то уравнение для функции  $\Psi$  принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \Psi = & \\
 & \frac{1}{l} \left[ \left( \frac{\partial D}{\partial x} \tau_1 + D \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial C}{\partial x} \tau_2 + C \frac{\partial \tau_2}{\partial x} - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{\partial C}{\partial y} \tau_2 + C \frac{\partial \tau_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial D}{\partial y} \tau_1 + D \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{F}{E} T(\tau) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( g \frac{\partial h}{\partial x} F + gh \frac{\partial F}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial y} E - gh \frac{\partial E}{\partial y} - \frac{F}{E} \gamma_1 \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( g \frac{\partial h}{\partial x} E + gh \frac{\partial E}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial y} F + gh \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{F}{E} \gamma_2 \right) \right], \quad (7) \\
 \frac{\partial \eta}{\partial x} = & \left[ F \frac{\partial \Psi}{\partial x} - E \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{E}{l} (C \tau_1 - D \tau_2) - \frac{F}{l} (D \tau_1 - C \tau_2) \right] \frac{l}{gh(E^2 + F^2)}, \\
 \frac{\partial \eta}{\partial y} = & \left[ E \frac{\partial \Psi}{\partial x} + F \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{F}{l} (C \tau_1 - D \tau_2) - \frac{E}{l} (D \tau_1 - C \tau_2) \right] \frac{l}{gh(E^2 + F^2)}, \\
 C = & \frac{2 \sin \pi \frac{h}{d} \sinh \pi \frac{h}{d}}{\cosh 2\pi \frac{h}{d} + \cosh 2\pi \frac{h}{d}}, \quad D = \frac{2 \cos \pi \frac{h}{d} \cosh \pi \frac{h}{d}}{\cosh 2\pi \frac{h}{d} + \cosh 2\pi \frac{h}{d}} - 1, \\
 E = & \frac{1}{2\pi \frac{h}{d}} \frac{\sin 2\pi \frac{h}{d} - \sinh 2\pi \frac{h}{d}}{\cosh 2\pi \frac{h}{d} + \cosh 2\pi \frac{h}{d}}, \quad F = -\frac{1}{2\pi \frac{h}{d}} \frac{\sin 2\pi \frac{h}{d} + \sinh 2\pi \frac{h}{d}}{\cosh 2\pi \frac{h}{d} + \cosh 2\pi \frac{h}{d}} + 1, \\
 \gamma_1 = & \frac{\partial}{\partial x} (ghE) + \frac{\partial}{\partial y} (ghF), \quad \gamma_2 = \frac{\partial}{\partial x} (ghF) + \frac{\partial}{\partial y} (ghE),
 \end{aligned}$$

$$d = \pi \sqrt{\frac{2K}{l}} - \text{глубина слоя Экмана.}$$

На береговом контуре ставится условие  $\Psi = 0$ .

В случае граничных условий (3),  $h = \text{const}$ ,  $K = \text{const}$  имеем:  
 $W = u + iv =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cosh(\alpha(h+z)) + \frac{k_b}{K\alpha} \sinh(\alpha(h+z))}{K\alpha \sinh(\alpha h) + k_b \cosh(\alpha h)} - \\
 & - \frac{ig}{l} \left( \frac{k_b \cosh \alpha z}{K\alpha \sinh(\alpha h) + k_b \cosh(\alpha h)} - 1 \right) \frac{\partial \eta}{\partial n}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{il}{K}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

2. В случае, если силами Кориолиса можно пренебречь ( $l = 0$ ), удастся найти решение системы уравнений (1) с гранич-

ными условиями (2), (3) и для случая произвольного коэффициента турбулентного обмена  $K \neq const$  :

$$\begin{aligned}
 u &= g \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_{-h}^{\bar{z}} \frac{\xi}{K(\xi)} d\xi + \tau_1 \int_{-h}^{\bar{z}} \frac{1}{K(\xi)} d\xi + \frac{g \frac{\partial \eta}{\partial x} (-h) + \tau_1}{k_b}, \\
 v &= g \frac{\partial \eta}{\partial y} \int_{-h}^{\bar{z}} \frac{\xi}{K(\xi)} d\xi + \tau_2 \int_{-h}^{\bar{z}} \frac{1}{K(\xi)} d\xi + \frac{g \frac{\partial \eta}{\partial y} (-h) + \tau_2}{k_b}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

3. В решениях (5), (8) величина  $\frac{\partial \eta}{\partial n}$  присутствует как параметр. Для вычисления этой величины надо привлекать дополнительное уравнение для  $\Psi$ , позволяющее найти  $\frac{\partial \eta}{\partial n}$ . В частном

случае движения жидкости в круговом цилиндре радиуса  $R$  под действием ветра, заданного формулой:  $\tau_1 = -y$ ,  $\tau_2 = x$ , и условия прилипания на дне, этот параметр легко исключить и при  $l \neq 0$ , и при  $l = 0$ . При  $l \neq 0$  имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{x}{gh} \frac{D}{E}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{y}{gh} \frac{D}{E}, \tag{10}$$

т. е. возмущенная поверхность представляет собой параболоид вращения. Подставляя соотношения (10) в (5), получим явное выражение для  $u$  и  $v$ .

Для  $l = 0$  получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \\
 u &= \tau_1 \frac{(z+h)}{K}, \quad v = \tau_2 \frac{(z+h)}{K},
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

что означает невозмущенную свободную поверхность и линейное распределение скорости по глубине.

На рисунке 1 изображено точное решение (8) при  $h = 20$ ,  $l = 1.18 \times 10^{-4}$ ,  $\tau = 5.5 \times 10^{-5}$ ,  $k_z = 0.002$ , сплошная линия соответствует  $k_b = 0$ , пунктирная линия соответствует  $k_b = 0.007$ .

На рисунке 2 изображено точное решение (8) при  $k_b = 0.007$ , и классическое решение Экмана, сплошная линия соответствует решению Экмана, а пунктирная линия соответству-

ет  $K_b = 0.007$ . Видно, что при  $K_b = 0.007$  решение для условия проскальзывания совпадает с решением Экмана, т. е. практически означает условие прилипания.

На рисунке 3 сплошной линией обозначено классическое решение Экмана (условие прилипания на дне), пунктирной линией – решение (8) при  $k_b = 0$ . Видно, что решения отличаются только на дне.

На рисунке 4 изображено классическое решение Экмана (пунктирная линия) и точное решение (8) при условии проскальзывания без трения на дне (сплошная линия),  $h = 8$ .

Таким образом, для глубин порядка 20 м отличие точного решения с условием проскальзывания на дне от классического решения Экмана наблюдается только на дне, а для глубин порядка 8 м отличие существенно и на поверхности бассейна.

На рисунке 5 изображено решение задачи о движении жидкости в круговом цилиндре под действием ветра с наклонами поверхности, найденными по формуле (10),  $l \neq 0$ , а на рисунке 6 – дрейфовое течение, когда наклоны свободной поверхности равны 0. На рисунке 7 изображено решение этой же задачи при параметре Кориолиса равном 0. Решение получено для цилиндра радиуса 190 м и глубиной 1300 м.

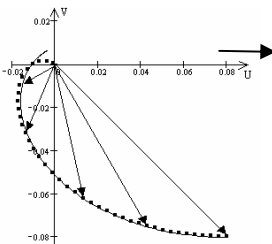


Рис. 1

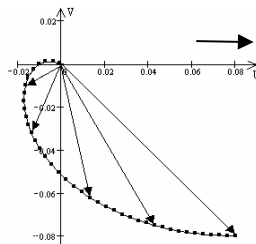


Рис. 2

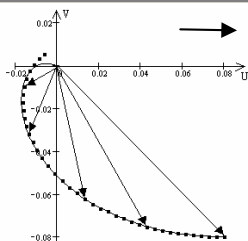


Рис. 3

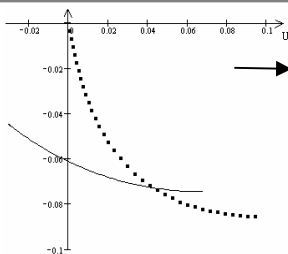


Рис. 4

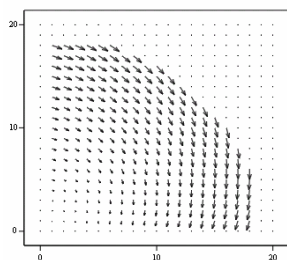


Рис. 5

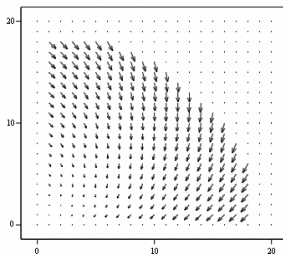


Рис. 6

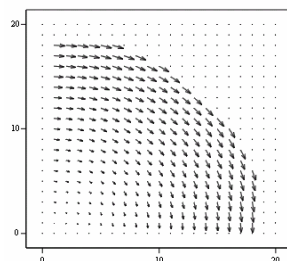


Рис.7

Анализ рисунков 5 и 6 показывает, что ранее применявшееся для анализа ветровых течений решение, в котором считается, что наклоны свободной поверхности равны 0, дает завышенный по сравнению с реальной ситуацией поворот течения на поверхности по отношению к направлению ветра. Если параметр Кориолиса не учитывается, то направление течения на поверхности в точности совпадает с направлением ветра.

**Список литературы:**

1. Ekman V.W. On the influence of the earth's rotation on ocean-currents. Arkiv Mat. Astr. Fysik 1905, 2, №4.
2. Welander P. Wind action on a shallow sea: some generalization of Ekman's theory. Tellus 1957, IX, №1, pp. 45-52.
3. Witten A., Thomas J. Steady wind-driven currents in a large lake with depth-dependent eddy viscosity. J. of Phys. Oceanogr., 1976, January, pp. 85-92.

**ON THE NEW ANALITICAL SOLUTIONS FOR EKMAN'S EQUATIONS**

**Gavrilova L. V., Gapeyeva T. V., Kompaniets L. A.**

(Russia, Krasnoyarsk)

*The first analytical solution for the simplified 3-D model of wind stationary motions of homogeneous fluid were found by Ekman in case of variable coefficient of turbulent exchange and sticking conditions at the bottom. We suggest analytical solutions for this model in following cases: coefficient of turbulent exchange is constant and slipping conditions at the bottom. Coriolis parameter is zero, sticking and slipping conditions at the bottom and arbitrary variable coefficient of turbulent exchange (earlier was known the solution in case linear and exponential depth distribution of coefficient of turbulent exchange and sticking condition at the bottom).*