СРАВНЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИБО ОТСУТСТВИИ СТРУКТУРЫ В РАСЧЕТНОЙ СЕТКЕ

Челноков Ф. Б.

(Россия, Московская обл., г. Долгопрудный)

В работе приводится сравнение аналитического решения модельной задачи о распространении волн в упругой среде с численными решениями, полученными конечно-разностными схемами при использовании регулярной решетки либо бесструктурной сетки. Численные подходы сопоставляются с точки зрения точности решения по различным критериям и скорости счета.

Потребность в моделирование тел со сложной геометрией, которая задана изначально, либо формируется в результате деформаций в процессе расчета, возникает все чаще. Однако даже для таких задач исследователи зачастую продолжают использовать регулярные решетки. Их недостаток в том, что не удается разработать полностью автоматический способ построения регулярной решетки в области произвольной формы. Кроме того, изменение оптимального положения узлов решетки при деформации тела зачастую требует постоянного решения затратной по ресурсам многомерной задачи минимизации некоторого функционала. Также из регулярной решетки невозможно произвольно выкидывать отдельные узлы, скажем для уменьшения их плотности в местах сильного сжатия и поддержания стабильного шага интегрирования. Фрагментация тел возможна лишь вдоль линий или плоскостей решетки. Существуют и другие недостатки.

Бесструктурная сетка не подвержена перечисленным проблемам, однако ее не всегда стремятся использовать, предполагая, что это негативно скажется на точности численного решения. В данной работе предпринимается попытка провести объективное экспериментальное сравнение схем, основанных на разных сетках.

Зачастую, схемы на регулярных сетках приводят к анизотропным решениям (рис.1). Профили решения в горизонтальном либо вертикальном направлениях существенно отличаются от диагональных профилей, несмотря на наличие центральной симметрии в постановке задачи. В диагональном направлении могут возникнуть осцилляции, даже при наличии ограничителей типа minmod на каждом этапе расщепления по направлениям (рис.1). В статье [1] ставится проблема анизотропии численного решения, и предлагаются способы ее оценки.

Рис. 1. Численное решение задачи точечного взрыва

В данной работе численно интегрировались уравнения линейной упругости [1] ($\lambda = \mu = 1, \rho = 1$) в области квадратной формы размерами $[-0.5;0.5]\times[-0.5;0.5]$, которая разбивалась на 300×300 ячеек, 90601 узлов (рис.3). Для этого использовались разностные схемы первого и второго порядков для равномерного расположения узлов, описанные в [1], а также единственная схема четвертого порядка, опирающаяся на пятиточечный шаблон. Для подавления нефизичных осцилляций применялся ограничитель типа minmod [2]. Построение многомерной схемы осуществлялось методом расщепления по пространственным координатам, когда один шаг интегрирования состоит из двух последовательных проходов вдоль каждой из x и y линий сетки соответственно.

Наихудшего качества решения следовало ожидать вдоль диагональных направлений (рис.1), поэтому была поставлена следующая модельная задача. Только в полосе $\left\|\vec{r} + (0.1;0.1)\right\| \le 0.03$ (рис.2) задавалось ненулевое начальное возмущение

$$\vec{v} = \vec{n}, \quad \sigma = -\sqrt{\rho(\lambda+2\mu)}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)\vec{n}\otimes\vec{n} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}I\right],$$

где $\vec{n} = (1,1)/\sqrt{2}$ задает направление распространения возмущения (коэффициенты в выражении для σ взяты из спектрального исследования системы упругих уравнений). На границах тела стояло условие отсутствие внешних сил, поэтому происходило порождение отраженных волн, которые интерферировали с изначальным возмущением (рис.2). Но на диагонали тела профиль волны должен сохранить вид ступеньки на момент времени $t = 0.4$, в который производилось сравнение численных решений.

Для треугольных нерегулярных сеток использовались сеточно-характеристические схемы первого [3] и второго [1] порядков. Первый порядок требовал линейной реконструкции значений в треугольнике по узлам в трех вершинах, сетка насчитывала 91290 узлов. Второй порядок получался при квадратичной реконструкции по значениям в 6 точках каждого треугольника, сетка состояла из 22960 узлов в вершинах треугольников и 68365 узлов в центрах ребер треугольников (рис. 3). Шаг по времени определялся минимальным расстоянием от узла до ближайшей границы любого из смежных с ним треугольников. Для достижения равенства, регулярные методы делали шаг интегрирования в размере 0.35 (число Куранта) от максимально возможного.

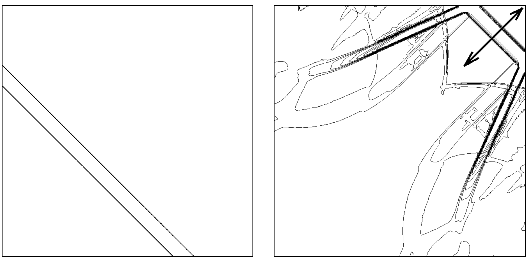
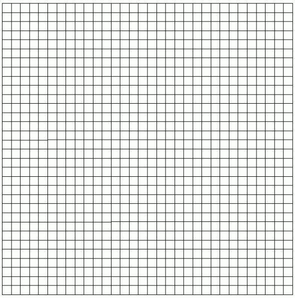
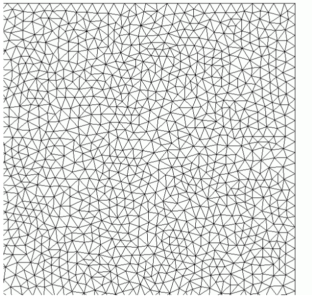


Рис. 2. Изолинии модуля скорости в начальный (слева) и конечный (справа) моменты времени периода моделирования.
На правом рисунке отмечен диагональный разрез, вдоль которого численные решения сравнивались с аналитическим





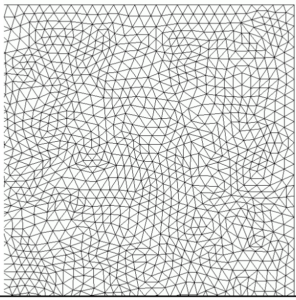
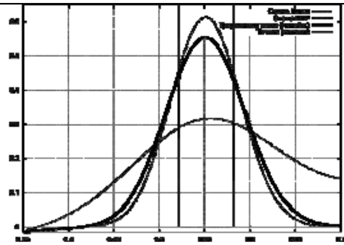
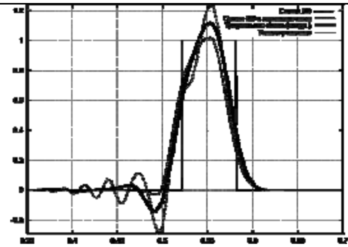


Рис. 3. Фрагменты расчетных сеток для регулярных методов (сверху слева), и нерегулярных — первого (сверху справа) и второго (внизу) порядков. На нижнем рисунке каждый треугольник сетки разбит на четыре части линиями, соединяющими центры ребер





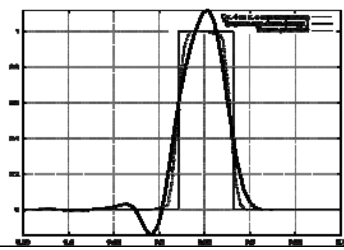


Рис. 4. Профили аналитического и численных решений

Результаты работы методов представлены на рисунке 4, а также в таблице 1. Экспериментальные оценки точности схем основывались на сравнении численного решения с аналитическим в узлах диагонального разреза (рис. 2). Для нерегулярных сеток сравнивались значения в точках пересечения диагонали с ребрами треугольников. Были использованы следующие статистические оценки, примененные к модулю разности проекции скорости точного и численного решений на направление разреза: p_1 — медиана, p_2 — среднее значение, p_3 — среднеквадратическое значение.

Таблица 1. Точность численного решения и продолжительность счета

Схема (порядок)	p_1	p_2	p_3	t, сек
Лакса (1)	0.19	0.25	0.33	34
КИР (1)	0.050	0.15	0.23	51
Треугольная сетка (линейн.)	0.067	0.16	0.25	260
Лакса – Вендорффа (2)	0.023	0.093	0.17	48
ЛВ с ограничителем (2)	$8.8\cdot10^{-4}$	0.064	0.16	179
4-го порядка с ограничителем	$2.7\cdot10^{-5}$	0.029	0.10	284
Треугольная сетка (квадр.)	0.0053	0.066	0.13	490

Расчет велся на обычном персональном компьютере, в последней колонке таблицы 1 приведено затраченное время на достижения решения каждым из методов.

Переходя к выводам, можно утверждать, что точность решений, полученных на треугольной сетке при равной средней плотности узлов и шаге интегрирования, лишь незначительно уступает точности лучших схем того же порядка аппроксимации, разработанных для регулярных решеток. Желательно для треугольных сеток еще реализовать ограничители незначительных нефизичные осцилляций, возникающие при нелинейной реконструкции значений в треугольнике.

Из таблицы 1 видно, что регулярные методы существенно выигрывают по скорости счета у своих оппонентов на треугольных сетках. Тому есть объективное объяснение: регулярные методы не требуют поиска надлежащего треугольника, а реконструкция решения на прямой значительно менее трудоемка, чем на плоскости. В среднем можно говорить о 5-ти кратном преобладании, хотя представленные цифры затраченного времени следует рассматривать только как оценки сверху, поскольку программные реализации допускают различные оптимизации. В частности, для регулярных методов в имеющейся программе в каждом узле решетки хранился лишь один набор переменных, в то время как узлы в треугольной сетке хранили по два набора переменных, отвечающих текущему и будущему моментам времени.

Однако если для регулярной решетки приходится пользоваться чрезвычайно ресурсоемкими алгоритмами глобальной перестройки сетки [4], то с точки зрения скорости счета хаотическая сетка может быть выгоднее, а иногда и являться единственно возможным вариантом.

Список литературы:

1. Агапов П. И., Челноков Ф. Б. Сравнительный анализ разностных схем для численного решения двумерных задач механики деформируемого твердого тела // «Моделирование и обработка информации». М.: МФТИ, 2003. с. 19 – 27.
2. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
3. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
4. Петров И. Б., Челноков Ф. Б. Численное исследование волновых процессов и процессов разрушения в многослойных преградах. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №10. С.1562 – 1579.

Челноков Ф. Б. — МКО — 2005, ч. 2, стр. 633 – 639
Chelnokov F. B.— MCE — 2005, vol. 2, p. 633 – 639

COMPARISON OF FINITE-DIFFERENCE SCHEMES IN THE PRESENCE OF STRUCTURED GRID OR UNSTRUCTURED MESH

Chelnokov F. B.

(Russia, Moscow region, Dolgoprudniy)

The article contains the comparison results of analytical solution for a model wave propagation problem in a linear-elastic solid with numerical solutions, obtained using finite-difference schemes and either regular grid or unstructured mesh. The precision of numerical solution in respect to different criteria and the time of problem's computation are given for each scheme.