

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА СЛАБО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СФЕРЕ

Голо В. Л., Сеницын Д. О.

(Россия, Москва)

Работа посвящена проблеме визуализации геодезических на поверхности, близкой к сфере. Предложен метод приближенного изображения поведения геодезических в этом случае, основанный на том, что небольшой участок геодезической на такой поверхности близок к ее сечению плоскостью (к «большому кругу»). Метод применен к поверхности, полученной из сферы деформацией специального вида. Предлагаемая картина поведения геодезических описывается вспомогательной гамильтоновой системой более простого вида, чем точные уравнения этих кривых. Описана топология решений этой системы в терминах графа сепаратрис, вершины которого соответствуют геодезическим, лежащим вблизи одной плоскости (т.е. вблизи некоторого «большого круга»), а ребра (сепаратрисы) – линиям, которые в одном направлении приближаются к одному из таких «больших кругов», а в другом – к другому. В зависимости от значений параметров, определяющих исследуемую деформацию сферы, возникает несколько топологически различных типов этих графов.

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы описываем геодезические на поверхности, используя механическую терминологию, т.е. рассматриваем их как траектории свободного движения частицы по этой поверхности. Кроме того, мы не вводим для описания геодезических параметризацию сферы двумя обобщенными координатами (как это часто делают, работая далее с уравнениями с символами Кристоффеля), а пользуемся

обычными декартовыми координатами. В этом случае наша задача формулируется как вопрос о нахождении движения механической системы со связью. Это движение мы описываем с помощью уравнений Лагранжа первого рода (см. [1]), которые, с нашей точки зрения, являются более удобными для аналитического и численного анализа.

Основная идея нашего метода состоит в следующем. Если данная поверхность мало отличается от сферы, то небольшой участок геодезической на ней (длина которого меньше характерных размеров поверхности) можно приблизить участком «большого круга». Поэтому движение частицы по поверхности можно представить себе как движение по «обручу» («большому кругу»), который, однако, не остается на месте, а медленно поворачивается с течением времени (рис. 1). Тогда можно, вместо того чтобы определять движение точки по поверхности, исследовать, как изменяется положение этого обруча в пространстве, получая качественную информацию о поведении геодезической.

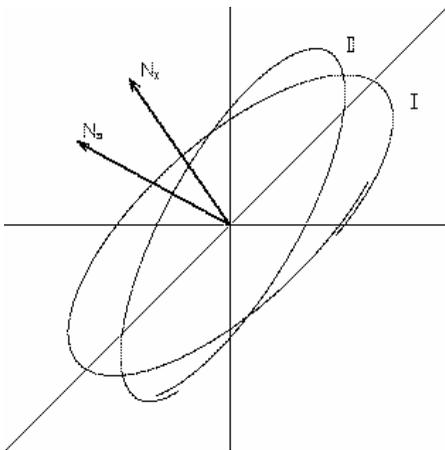


Рис.1: Два участка I и II геодезической на слабо деформированной сфере; векторы N_I и N_{II} – нормали к большому кругу, приближающим эти участки.

Математически это можно осуществить, определив, как изменяется нормаль к плоскости этого «обруча», в качестве которой служит вектор углового момента нашей частицы. Используя метод осреднения, можно получить для углового момента систему уравнений, выражающую его производную только через сам момент и параметры поверхности. Эта вспомогательная система имеет меньшую размерность, чем точные уравнения геодезических. Поэтому исследование топологических свойств ее решений представляется более простым, чем в исходной системе. В этом и состоит упрощение, даваемое нашим методом. Для этой системы сравнительно легко найти стационарные решения и определить их устойчивость. Если же отбросить в ней величины второго и более высоких порядков по малым параметрам, определяющим деформацию сферы, то она будет иметь интегралом движения квадрат углового момента. Поэтому ее решения будут располагаться на сфере, а стационарные точки и сепаратрисы образуют на ней двумерный граф.

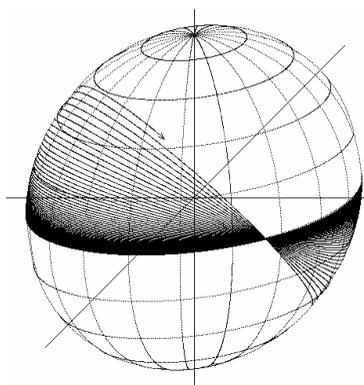


Рис. 2: Эллипсоид с осями 1.01, 1.02, 1.03; геодезическая, соответствующая сепаратрисе вспомогательной системы; частица удаляется по ней от решения, соответствующего седлу – горизонтального «экватора».

Геодезическая, соответствующая стационарному решению вспомогательной системы, представляет собой кривую,

лежащую вблизи одного большого круга. Геодезическая, соответствующая сепаратрисе, показана на рис. 2: это линия, «соединяющая» два таких стационарных больших круга, соответствующих седлам вспомогательной системы.

Этот подход применялся нами к поверхности, уравнение которой получается из уравнения сферы добавлением четвертых степеней координат, умноженных на малые коэффициенты. Вспомогательная система оказывается в этом случае гамильтоновой. Мы находим для нее топологический тип графа сепаратрис в зависимости от коэффициентов деформации.

II. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе мы рассматриваем поверхности с уравнением $\varphi(\vec{x}) = 0$, в котором $\varphi(\vec{x})$ имеет вид:

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 (x_i^2 + \varepsilon_i x_i^4) - 1, \text{ где } \varepsilon_i - \text{ малый параметр.}$$

Движение частицы единичной массы по такой поверхности описывается уравнением (см. [1]):

$$\ddot{\vec{x}} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}}. \quad (1)$$

В соответствии с изложенными соображениями рассмотрим угловой момент

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Из уравнения (1) можно получить выражения для производных по времени от его компонент. Мы отбросили в этих выражениях члены второго и более высоких порядков по ε_i , а также применили к ним метод осреднения в следующем виде. Решение невозмущенной системы имеет вид:

$$\vec{x} = \cos(\omega t + \theta) \vec{e}_1 + \sin(\omega t + \theta) \vec{e}_2,$$

где базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ выбираются так, чтобы \vec{e}_3 был параллелен \vec{L} , а угловая скорость $\omega^2 = \dot{\vec{x}}^2$ и, если

рассматривать только главную часть по ε_i , $\omega^2 = \dot{x}^2 = L^2$. Подставляя это решение в выражения для производных от компонент момента и производя осреднение по времени, т.е. отбрасывая осциллирующую часть, получим:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{3}{4} \frac{L_2 L_3}{L^2} [(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) L_1^2 + \varepsilon_3 L_2^2 - \varepsilon_2 L_3^2] \\ \dot{L}_2 &= \frac{3}{4} \frac{L_3 L_1}{L^2} [-\varepsilon_3 L_1^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) L_2^2 + \varepsilon_1 L_3^2] \\ \dot{L}_3 &= \frac{3}{4} \frac{L_1 L_2}{L^2} [\varepsilon_2 L_1^2 - \varepsilon_1 L_2^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) L_3^2] \end{aligned} \quad (2)$$

Это и есть вспомогательная система уравнений. Она является гамильтоновой (см. [2], [3]) со скобками Пуассона

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k$$

(ε_{ijk} – символ Леви-Чивита, равный знаку перестановки (ijk) , если i, j, k – различные натуральные числа от 1 до 3, и нулю в противном случае) и гамильтонианом

$$H = \frac{3}{16} L^2 \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \left[\left(\frac{L_i}{L} \right) - 1 \right]^2.$$

Зная два интеграла этой системы L^2 и H , можно получить ее точное решение. Однако мы не используем его в дальнейшем.

III. ТОПОЛОГИЯ РЕШЕНИЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим стационарные решения уравнений (2), т.е. решения вида $\bar{L}(t) \equiv \bar{L}_0$. Их можно разделить на три группы:

C1 Две из компонент вектора \bar{L}_0 равны нулю:

а. $L_{10} = 0, L_{20} = 0, L_{30} \neq 0$;

б. $L_{10} = 0, L_{20} \neq 0, L_{30} = 0$;

в. $L_{10} \neq 0, L_{20} = 0, L_{30} = 0$;

С2 Одна из компонент вектора \vec{L}_0 равна нулю:

а. $L_{10} = 0, L_{20} \neq 0, L_{30} \neq 0, \varepsilon_3 L_{20}^2 - \varepsilon_2 L_{30}^2 = 0$;

б. $L_{20} = 0, L_{30} \neq 0, L_{10} \neq 0, \varepsilon_1 L_{30}^2 - \varepsilon_3 L_{10}^2 = 0$;

в. $L_{30} = 0, L_{10} \neq 0, L_{20} \neq 0, \varepsilon_2 L_{10}^2 - \varepsilon_1 L_{20}^2 = 0$;

С3 Все компоненты вектора \vec{L}_0 ненулевые:

$$L_{10} \neq 0, L_{20} \neq 0, L_{30} \neq 0, \frac{L_{10}^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1} = \frac{L_{20}^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1} = \frac{L_{30}^2}{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}$$

Решения С1 существуют при любых ε_i , С2.а, С2.б, С2.в – при $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ соответственно, С3 – при

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0,$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0,$$

$$-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0.$$

Далее, мы можем исследовать устойчивость этих решений, линеаризуя уравнения (2) в стационарных точках. Получается, что решения устойчивы при следующих условиях:

С1у а. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$;

б. $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0$;

в. $\varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$;

С2у а. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$;

б. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$;

в. $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$;

С3у при любых ε_i .

Объединим полученные результаты. Зафиксируем значение интеграла L^2 . Тогда траектории системы будут расположены на сфере радиуса L с центром в начале координат. Легко видеть, что они не могут пересекаться. Устойчивые стационарные решения изобразятся на ней фокусами, неустойчивые – седлами, а сепаратрисы – линиями, соединяющими седла друг с другом (см. [4]). Вместе они образуют на сфере граф, вершины которого – стационарные точки, а ребра – сепаратрисы (рис. 3).

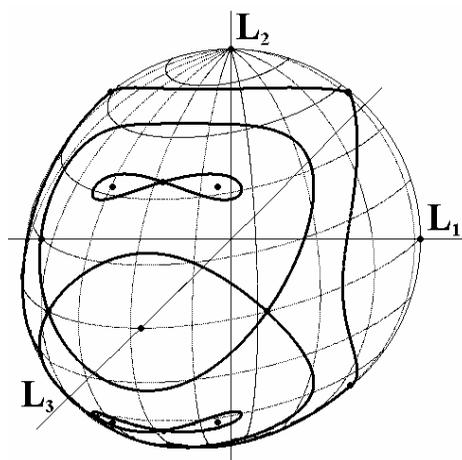


Рис. 3: Граф сепаратрис на сфере, описывающий траектории углового момента – решения вспомогательной системы.

Для удобства изображения графов на сфере мы будем далее показывать лишь их переднюю половину в проекции на плоскость L_1L_2 (вторая половина выглядит так же в силу симметрии осредненной системы относительно преобразования $P: t \mapsto -t, L_i \mapsto -L_i, i = 1, 2, 3$). Зная, при каких значениях ε_i каждая стационарная точка существует и при каких – устойчива, мы получаем следующие типы графов:

Тип I 7 фокусов и 6 седел; такой граф возникает, если ε_i удовлетворяют условию:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0, \\
 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0, \\
 -\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Тип II 5 фокусов и 4 седла; условия на ε_i : все они должны быть не равны нулю и иметь один знак, причем хотя бы одно из неравенств (3) не выполнено.

Тип III 3 фокуса и 2 седла; ε_i должны удовлетворять одному из следующих условий:

- а) $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0$ и $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \leq 0$; б) $\varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \leq 0$; в) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \leq 0$.

Тип IV 2 фокуса и 1 седло; ε_i должны удовлетворять одному из следующих условий:

- а) $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 \varepsilon_3 \leq 0$; б) $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \leq 0$; в) $\varepsilon_3 = 0$ и $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \leq 0$.

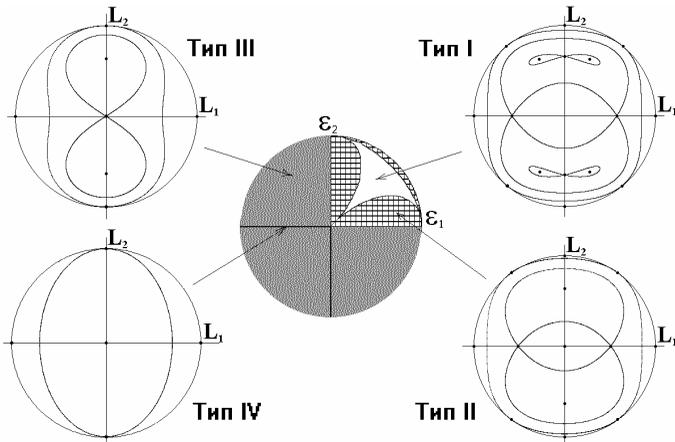


Рис. 4: Области пространства ε_i и соответствующие им графы типов I – IV.

В зависимости от того, какой тип графа описывает систему при данных значениях параметров деформации, соответствующая точка в пространстве ε_i попадает в одну из четырех областей. Результат представлен на рис. 4.

В заключение остановимся на вопросе, как решения вспомогательной системы согласуются с самими геодезическими. Даже в случае значительного отличия поверхности от сферы видно довольно неплохое согласие (рис. 5, слева), если же рассматривать более слабые деформации, то соответствие становится еще более точным (справа).

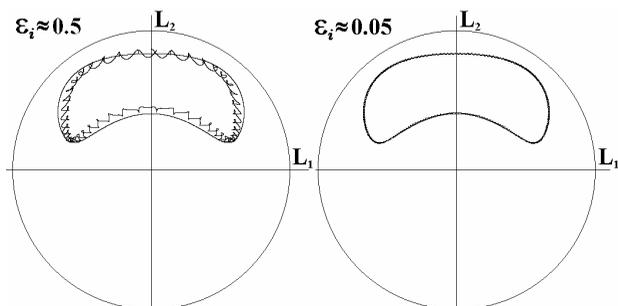


Рис. 5. Сравнение траекторий углового момента: колеблющаяся линия – для движения частицы по геодезической, плавная – для вспомогательной системы.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами предложен способ наглядного изображения топологических свойств геодезических на поверхностях, получаемых из сферы слабыми деформациями определенного вида. Этот метод использует близость поверхности к сфере для применения асимптотических методов к исследованию геодезических на ней. В результате получается вспомогательная система уравнений, приближенно описывающая их поведение. Исследуя ее динамику, можно описать топологию геодезических в терминах графа сепаратрис, который легче

наглядно представить в графической форме, чем сами геодезические.

Список литературы:

1. *К.Якоби*. Лекции по динамике, лек. 1,7. М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. *В.И.Арнольд*. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2003.
3. *А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко*. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
4. *Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко*. Современная геометрия: методы и приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

**VISUALIZATION OF GEODESICS
ON A WEEKLY DEFORMED SPHERE**

Golo V. L., Sinitsyn D. O.

(Russia, Moscow)

We aim at visualizing geodesic lines on a surface, which is close to the standard sphere. We offer a means of the asymptotic representation of geodesics based on the fact that a short segment of the geodesic can be well approximated by an appropriate “great circle” of the sphere. We apply the method to a surface generated by a specific deformation of the sphere. We obtain a graphic description of geodesics with the help of an auxiliary Hamiltonian system. The main point about the auxiliary system is that it is much simpler than the initial one for geodesics, and even admits of the exact solution. The topology of solutions to the system is described by the separatrix graph; the vertices corresponding to geodesics close to great circles and the edges (separatrices) to geodesic coils joining them. The variation of parameters determining the deformation of the sphere generates several topological types of the graphs.