ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ РАЙДЕМАЙСТЕРА ДЛЯ СОВПАДЕНИЙ. I

Рубашкина Е. В.

(Россия, Москва)

Наименьшее число совпадений среди всех отображений гомотопных (f,g) *часто можно вычислить по числу Нильсена* $N(f,g)$*. Проблема состоит в трудности нахождения* $N(f,g)$*. Число Райдемайстера* $R(f,g)$ *есть верхняя грань для* $N(f,g)$ *и часто является полезной оценкой числа Нильсена. Используя поднятия* (f,g) *и, определенные подходящим образом, поднятия ограничений* (f,g) *на подпространство, мы определяем число Райдемайстера соответствующее относительному числу Нильсена. Наше число Райдемайстера является верхней границей числа Нильсена, и если пространства являются янговскими, то оно равно числу Нильсена. Мы показываем, что это число имеет многие свойства аналогичные свойствам классического числа Райдемайстера.*

Введение.

Теория классов совпадения Нильсена занимается оцениванием нижней границы числа совпадений двух отображений $f,g:X\to Y$. Для этой цели вводятся, так называемые, числа Нильсена $N(f,g)$ и Райдемайстера $R(f,g)$. Цель этой работы определить относительное число Райдемайстера для отображений $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ пар связных компактных полиэдров и описать его свойства.
Язык категорий и функторов часто очень удобен для описания структурных аспектов теории. В теории классов совпадения

существует две иерархии интересов – это подпространства и регулярные накрывающие пространства. Другими словами, мы интересуемся связями между классами совпадения отображения и классами совпадения их ограничений на подпространства, а также связями между ординарными классами и их укрупнениями, определенными через регулярные накрывающие пространства. Ниже мы обсуждаем эти аспекты.

0. Язык категорий и функторов в теории классов совпадения.

В этом параграфе нас интересует связь между классами совпадения отображений, классами совпадения их поднятий на универсальную накрывающую и классами совпадения ограничений этих отображений на подпространства. Предполагается, что пространства, которые рассматриваются в этом параграфе, имеют универсальные накрывающие пространства (то есть они являются локально связными и полулокально односвязными). Пусть $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, фиксируем $p_X : \tilde{X} \to X$, $p_Y : \tilde{Y} \to Y$ - универсальные накрывающие проекции.

Рассмотрим пару поднятий отображений для которой следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f},\tilde{g}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f,g]{} & Y \end{array}$$

где вертикальные стрелки означают накрывающие проекции, то есть $p_Y \tilde{f} = f p_X$, $p_Y \tilde{g} = g p_X$ (то есть $\tilde{f}$ переносит каждый слой $p_X^{-1}(x)$ в слой $p_Y^{-1}(f(x))$, аналогично для $\tilde{g}$).

Отождествим $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$ с группами $D(\tilde{X}, p_X)$, $D(\tilde{Y}, p_Y)$ накрывающих преобразований пространств $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ соответственно.

Следующие предложения являются стандартными фактами из теории накрывающих пространств. Предполагается, что все рассматриваемые ниже пространства являются конечными полиэдрами.

Предложение 1. 1.

(1) Предположим, $x_0 \in X$ и $x_0 = \varphi(x_0)$, $\varphi : X \to X_1$; $\tilde{x}_0 \in p_X^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}'_0 \in p_{X_1}^{-1}(x'_0)$, где p_X, p_{X_1} - накрывающие проекции. Тогда существует единственное поднятие $\tilde{\varphi}$ отображения φ, такое, что $\tilde{\varphi}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$.

(2) Для любых двух поднятий $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}'$ отображения φ существует единственный $\beta \in \pi_1(X_1)$, такой что $\tilde{\varphi}' = \beta\tilde{\varphi}$.

(3) Если $\tilde{\varphi}$ - поднятие φ; $\alpha \in D(\tilde{X}, p_X)$, $\beta \in D(\tilde{X}_1, p_{X_1})$, то $\beta\tilde{\varphi}\alpha$ также является поднятием φ.

Определение 1. 2. Пусть $f : X \to Y$ и $f_1 : X_1 \to Y_1$ - два отображения из пары пространств (X, X_1) в другую пару пространств (Y, Y_1). Морфизмом из f в f' является пара отображений $\varphi : X \to X_1$ и $\varphi_1 : Y \to Y_1$, такая что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$$

коммутативна, то есть $\varphi_1 f = f_1\varphi$. Отображения $\{f : X \to Y\}$ и морфизмы между ними образуют категорию отображений двух пространств.

Предложение 1. 3. Пусть $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$ - морфизм пары отображений (f, f_1). Даны поднятие $\tilde{f}$ отображения f, поднятия $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_1$ отображений φ и φ_1. Существует единственное поднятие $\tilde{f}_1$ отображения f_1, такое, что диаграмма $\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}_1} & \tilde{Y}_1 \end{array}$ коммутативна.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ и пусть $\tilde{x}'_0 = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_0)$. Существует единственное поднятие $\tilde{f}_1$ отображения f_1, такое что $\tilde{f}_1(\tilde{x}'_0) = \tilde{\varphi}_1 \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. $\tilde{\varphi}_1 \tilde{f}$ и $\tilde{f}_1 \tilde{\varphi}$ - поднятия одного и того же отображения, $\varphi_1 f = f_1 \varphi : X \to Y_1$ и они совпадают в точке $\tilde{x}_0$. В силу свойства единственности поднятия $\tilde{\varphi}_1 \tilde{f} = f_1 \tilde{\varphi}$.

Отсюда следует, что пара поднятий $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1)$ определяет соответствие $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1)_{lift}$ из множества поднятий f в множество поднятий f_1, то есть $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1)_{lift}(\tilde{f}) = \tilde{f}_1$. Если $f = id_X$, $f_1 = id_{X_1}$, $\varphi_1 = \varphi$, то получаем соответствие $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{lift}$ между поднятиями тождественного отображения X и поднятиями тождественного отображения X_1. Это соответствие является гомоморфизмом $\tilde{\varphi}_\pi$ из $\pi_1(X)$ в $\pi_1(X_1)$, заданным формулой $\tilde{\varphi} \circ \alpha = \tilde{\varphi}_\pi(\alpha) \circ \tilde{\varphi}$, $\alpha \in \pi_1(X)$, $\tilde{\varphi}_\pi(\alpha) = \beta \in \pi_1(X_1)$. Нетрудно проверить

Предложение 1. 4.

(1) $\left((\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1) \circ (\tilde{\varphi}', \tilde{\varphi}'_1)\right)_{lift} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1)_{lift} \circ (\tilde{\varphi}', \tilde{\varphi}'_1)_{lift}$.

(2) $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1)_{lift}(\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1)_{lift}(\tilde{f}_2) \circ (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1)_{lift}(\tilde{f}_1)$.

Рассмотрим морфизмы $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$ и $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \end{array}$.

Соответствие $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}$ индуцирует соответствие $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)^{\sim}_{lift}$ из пар поднятий отображений (f,g) в пары поднятий отображений (f_1,g_1): $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)^{\sim}_{lift} : (\tilde{f},\tilde{g}) \mapsto \left((\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}(\tilde{f}),(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)(\tilde{g})\right)$, где $(\tilde{f},\tilde{g})$ - пара поднятий отображений (f,g).

Точка x, для которой $f(x)=g(x)$ называется совпадением отображений f и g.

Рассмотрим связь между совпадениями f, g и совпадениями $\tilde{f}$, $\tilde{g}$. $\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$ $p_Y\tilde{f} = fp_x$, $\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$ $p_Y\tilde{g} = gp_X$.

a) Пусть $\tilde{x} \in p_X^{-1}(x)$. Тогда $f(x)=g(x)$ или $f(x)\neq g(x)$. Отсюда следует, что для каждой пары поднятий $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ пары f, g или $\tilde{f}(\tilde{x}) \in p_Y^{-1}(g(x)) = \tilde{g}p_X^{-1}(x)$, или $\tilde{f}(\tilde{x}) \notin p_Y^{-1}(g(x))$ соответственно.

Это означает, другими словами, что в соответствие с тем, является точка x точкой совпадения или нет, ограничения $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ на $p_X^{-1}(x)$ являются или нет послойными отображениями

$$\begin{array}{ccccc} p_X^{-1}(x) & \xrightarrow{\tilde{f}|_{p_X^{-1}(x)}} & p_Y^{-1}(f(x)) & \in & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow & & . \\ p_X^{-1}(x) & \xrightarrow{\tilde{g}|_{p_X^{-1}(x)}} & p_Y^{-1}(g(x)) & \in & \tilde{Y} \end{array}$$

b) Когда $f(x)=g(x)$, то есть $\tilde{f}(\tilde{x}) \in p_Y^{-1}(f(x))$, то или $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x})$, или $\tilde{f}(\tilde{x}) \neq \tilde{g}(\tilde{x})$. Во втором случае существует поднятие $\tilde{f}'$, такое что $\tilde{f}'(\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x})$. Следовательно, $f(x) = g(x)$ равносильно тому, что для любого $\tilde{x} \in p_X^{-1}(x)$ существует единственная пара поднятий отображений f и g, для которых $\tilde{x}$ - точка совпадения. Этот результат сводит задачу определения множества точек совпадения $C(f,g)$ к задаче определения точек совпадения $C(\tilde{f},\tilde{g})$ всех поднятий $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ и их p_X - образов. Возникает вопрос: если $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ имеют точку совпадения $\tilde{x} \in p_X^{-1}(x)$, какие другие поднятия отображений f, g имеют точки совпадения в $p_X^{-1}(x)$? Ответ следующий: с) пусть $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ - поднятия f, g с точкой совпадения $\tilde{x} \in p_X^{-1}(x)$, $\alpha \in \pi_1(X)$, $\beta \in \pi_1(Y)$ - накрывающие преобразования $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ соответственно.

Поднятие пары $(\alpha,\beta)(\tilde{f},\tilde{g}) = \beta(\tilde{f},\tilde{g})\alpha^{-1} = (\beta\tilde{f}\alpha^{-1}, \beta\tilde{g}\alpha^{-1})$ тогда имеет точку совпадения $\alpha\tilde{x} \in p_X^{-1}(x)$, $\tilde{x}$ - точка совпадения $(\tilde{f},\tilde{g})$. Обратно, если поднятия $(\tilde{f}',\tilde{g}')$ имеют точку совпадения $\alpha\tilde{x} \in p_X^{-1}(x)$, тогда $\tilde{f}' = \beta\tilde{f}\alpha^{-1}$, $\tilde{g}' = \beta\tilde{g}\alpha^{-1}$.

Определение 1. 5. Две пары поднятий $(\tilde{f},\tilde{g})$ и $(\tilde{f}',\tilde{g}')$ отображений $f,g : X \to Y$ называются сопряженными, если существует пара накрывающих преобразований $(\alpha,\beta) \in D(\tilde{X},p_X) \times D(\tilde{Y},p_Y)$, такие что $(\tilde{f}',\tilde{g}') = \beta(\tilde{f},\tilde{g})\alpha^{-1}$.

Это можно рассматривать как действие $D(\tilde{X},p_X) \times D(\tilde{Y},p_Y)$ на $lift(f,g)$ - множестве всех поднятий пары (f,g). В результате этого действия получаем пространство орбит $lift(f,g)/\sim$. Это отношение эквивалентности разбивает все пары поднятий на попарно непересекающиеся множества эквивалентности, которые называются классами поднятий (сопряженными

классами, классами Райдемайстера $R(f,g)$). Обозначим класс поднятий, содержащий $(\tilde{f},\tilde{g})$ символом $\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]=\left\{\beta\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\alpha^{-1}:(\alpha,\beta)\in D\left(\tilde{X},p_X\right)\times D\left(\tilde{Y},p_Y\right)\right\}$.
$C(f,g)=\bigcup\limits_{(\tilde{f},\tilde{g})}p_X C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$, $\left[\tilde{f}',\tilde{g}'\right]=\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]$ тогда и только тогда, когда $\left(\tilde{f}',\tilde{g}'\right)=\beta\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\alpha^{-1}$.

Теорема 1. **6**. (1) $C(f,g)=\bigcup\limits_{(\tilde{f},\tilde{g})}p_X C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$.

(2) $\left[\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right]=\left[\left(\tilde{f}',\tilde{g}'\right)\right]\Rightarrow p_X\left(C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right)=p_X\left(C\left(\tilde{f}',\tilde{g}'\right)\right)$.

(3) $\left[\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right]\neq\left[\left(\tilde{f}',\tilde{g}'\right)\right]\Rightarrow p_X\left(C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right)\cap p_X\left(C\left(\tilde{f}',\tilde{g}'\right)\right)=\varnothing$.

Доказательство. (1) следует из b). Из c) следует, что $C\left(\beta\tilde{f}\alpha^{-1},\beta\tilde{g}\alpha^{-1}\right)=\alpha C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$, и поэтому выполняются 2) и 3).

Подмножества $p_X C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$ множества точек совпадения $C(f,g)$ определяются классами поднятий $\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]$ пары (f,g).

Из пунктов (2) и (3) теоремы 1. 6 следует, что множество совпадений $C(f,g)$ пары (f,g) распадается на попарно непересекающиеся классы совпадений $p_X C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$, где $\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$ - представитель некоторой орбиты из $lift(f,g)/\sim$.

Класс пары поднятий никогда не пуст, а класс совпадения может быть пустым. В общем случае, один или несколько классов совпадения, определенных по разным классам поднятий могут быть пустыми. Класс пары поднятий определяет единственный непустой класс совпадений, в то время как пустой класс совпадений может определяться различными классами поднятий.

Множество $C(f,g)$ является суммой нильсеновских классов совпадения относительно отношения эквивалентности: точки

совпадения эквивалентны ($x \approx y$), если существует путь γ из x в y, такой что $f\gamma$ и $g\gamma$ гомотопны в пространстве Y относительно концов.
$C(f,g) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ и каждое слагаемое в сумме $C(f,g) = \bigcup\limits_{\left[(\tilde{f},\tilde{g})\right] \in lift\,(f,g)/\sim} p_X C(\tilde{f},\tilde{g})$ есть объединение нескольких классов Нильсена $p_X C(\tilde{f},\tilde{g}) = C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \ldots \cup C_{i_s}$ $(1 \le i_1 < \ldots < i_s \le k)$.

Теорема 1. 7. (1) Соответствие $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)^{\sim}_{lift}$ переводит класс поднятий пары f,g в класс поднятий пары f_1,g_1: $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)^{\sim}_{lift}\left[\tilde{f},\tilde{g}\right] \subset \left[(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}(\tilde{f}),(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)(\tilde{g})\right]$.

(2) На уровне классов поднятий это соответствие не зависит от поднятий $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)$ и определяется только отображениями φ и φ_1. Иначе будем обозначать это соответствие $(\varphi,\varphi_1)_{coin} : lift(f,g)/\sim \to lift(f_1,g_1)/\sim$.

(3) Каждый класс совпадения $f,g : X \to Y$ отображается $\varphi : X \to X_1$ в некоторый класс совпадения $f_1,g_1 : X_1 \to Y_1$. То есть, если $(\varphi,\varphi_1)_{coin} : \left[\tilde{f},\tilde{g}\right] \mapsto \left[\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right]$, то $\varphi p_X C(\tilde{f},\tilde{g}) \subset p_{X_1} C(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1)$ (каждый класс совпадения $f,g : X \to Y$ отображается в некоторый класс совпадения $f_1,g_1 : X_1 \to Y_1$).

Доказательство. (1) Рассмотрим пару $(\tilde{f}',\tilde{g}') = \beta(\tilde{f},\tilde{g})\alpha^{-1}$ из класса Райдемайстера пары $(\tilde{f},\tilde{g})$, то есть $\tilde{f}' = \beta\tilde{f}\alpha^{-1}$, $\tilde{g}' = \beta\tilde{g}\alpha^{-1}$, где $\alpha \in \pi_1(X)$, $\beta \in \pi_1(Y)$.
Тогда согласно **предложению 1.4.:**

$$(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}\left(\beta\tilde{f}\alpha^{-1}\right)=\tilde{\varphi}_{1\pi}(\beta)\circ(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}\left(\tilde{f}\right)\circ\tilde{\varphi}_{\pi}(\alpha)^{-1},$$

$$(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}\left(\beta\tilde{g}\alpha^{-1}\right)=\tilde{\varphi}_{1\pi}(\beta)\circ(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}(\tilde{g})\circ\tilde{\varphi}_{\pi}(\alpha)^{-1}. \qquad (2)$$

Пусть $\tilde{\psi}=\alpha_1\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}_1=\beta_1\tilde{\varphi}_1$ - другие поднятия φ и φ_1, где $\alpha_1\in\pi_1(X_1)$, $\beta_1\in\pi_1(Y_1)$ и $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}:\tilde{f}\mapsto\tilde{f}_1$, $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}:\tilde{g}\mapsto\tilde{g}_1$, тогда $(\tilde{\psi},\tilde{\psi}_1)_{lift}:\tilde{f}\mapsto\beta_1\circ\tilde{\varphi}\circ\alpha_1^{-1},\tilde{g}\mapsto\beta_1\circ\tilde{\psi}\circ\alpha_1^{-1}$ (см. **предложение 1. 3**). (3)

Если $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)^{\sim}_{lift}:\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\mapsto\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)$, то $\tilde{\varphi}C\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\subset C\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)$.

Определение 1. 8. Когда $(\varphi,\varphi_1)_{coin}:\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]\mapsto\left[\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right]$, будем говорить, что (φ,φ_1) отображает класс совпадения $p_XC\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$ в класс $p_{X_1}C\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)$.

Так как каждый класс совпадений (f,g) маркирован классом поднятий, то каждый класс совпадений (f,g) отображается с помощью (φ,φ_1) в единственный класс совпадения (f_1,g_1), даже в случае, когда $p_XC\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)=\varnothing$.

Имеет место следующее утверждение

Предложение 1. 9. Для класса поднятий $\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)$ пары (f_1,g_1) имеем $C(f,g)\cap\varphi_1^{-1}p_{X_1}\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)=\bigcup\limits_{\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]\in(\varphi,\varphi_1)^{-1}_{coin}\left[\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right]}p_XC\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)$.

Определение 1. 10. Пусть X, Y - связные компактные полиэдры, $f,g:X\to Y$ - отображения. Данными классов совпадений пары (f,g) (обозначим $COIN(f,g)$) назовем взвешенное множество классов поднятий $\tilde{f},\tilde{g}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$ пары (f,g); весом класса $\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]$ является индекс класса совпадения $index\left(f,g;p_XC\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right)$, определенный аксиоматически. Правило, которое сопоставляет паре отображений (f,g) объект

$COIN(f,g)$, а паре морфизмов $\varphi : X \to X_1$, $\varphi_1 : Y \to Y_1$ отображений $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$ и $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \end{array}$ соответствие $(\varphi,\varphi_1)_{coin} : COIN(f,g) \to COIN(f_1,g_1)$ является ковариантным функтором из категории отображений $X \to Y$ связных компактных пространств в категорию взвешенных множеств. Будем называть этот функтор функтором классов совпадения. Можно доказать справедливость следующей леммы:

Лемма 1. 11. Предположим, что $y_0 \in Y$ и $\tilde{y}_0 \in p_Y^{-1}(y_0)$ являются базисными точками, используемыми для отождествления $\pi_1(Y)$ с группой накрывающих преобразований $p_Y : \tilde{Y} \to Y$. Аналогично, $y_0' \in Y_1$ и $\tilde{y}_0' \in p_{Y_1}^{-1}(y_0')$. Пусть $\varphi_1 : Y \to Y_1$ - отображение, $\tilde{\varphi}_1 : \tilde{Y} \to \tilde{Y}_1$ - его накрытие. Пусть $\tilde{w}$ - путь в $\tilde{Y}_1$ из $\tilde{y}_0'$ в $\tilde{\varphi}_1(\tilde{y}_0)$ и $w = p_{Y_1} \circ \tilde{w}$.
Тогда следующая диаграмма коммутативна $\pi_1(Y,y_0) \xrightarrow{\varphi_{1\pi}} \pi_1(Y_1,\varphi_1(y_0)) \xrightarrow{w_*} \pi_1(Y_1,y_0')$, то есть $\tilde{\varphi}_{1\pi} = w_* \circ \varphi_{1\pi}$.

Предложение 1. 12. Пусть $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$ и $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \end{array}$ - пара морфизмов, где вертикальные стрелки $\varphi : X \to X_1$ и $\varphi_1 : Y \to Y_1$ (это означает, что $\varphi_1 f = f_1 \varphi$ и $\varphi_1 g = g_1 \varphi$).

(1) Если $\varphi_{1\pi}:\pi_1(Y)\to\pi_1(Y_1)$ - сюръективный гомоморфизм, тогда $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}$ - сюръективно, $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)^{\sim}_{lift}$ - сюръективно, следовательно, $(\varphi,\varphi_1)_{coin}:COIN(f,g)\to COIN(f_1,g_1)$ также сюръективно.

(2) Если $\varphi_{1\pi}:\pi_1(Y)\to\pi_1(Y_1)$ - инъективно, тогда $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}$ - инъективно.

(3) Предположим, что $(\varphi,\varphi_1)_{coin}\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]=\left[\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right]$. Тогда существуют поднятия $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_1$, такие что $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)=\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)$.

Доказательство. (1) $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}:\tilde{f}^*\mapsto\tilde{f}_1^*$, где $\tilde{f}^*$, $\tilde{f}_1^*$ - поднятия f и f_1. Тогда для любых других поднятий $\tilde{f}_1$ отображения f_1 мы имеем $\tilde{f}_1=\beta\tilde{f}_1^*$ для некоторого $\beta\in\pi_1(Y_1)$. Так как $\varphi_{1\pi}$ - сюръективно, то и $\tilde{\varphi}_{1\pi}$ - сюръективно по лемме 1. 11. Таким образом, существует $\alpha\in\pi_1(Y)$, такой что $\tilde{\varphi}_{1\pi}(\alpha)=\beta$ и $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}:\alpha\tilde{f}^*\mapsto\beta\tilde{f}_1^*$.

(2) Пусть для одного и того же поднятия $\tilde{f}^*$ отображения f это поднятие переходит в разные поднятия $\widetilde{f}^*\mapsto\widetilde{f}_1^*$ и $\tilde{f}^*\mapsto\beta\tilde{f}_1^*$ отображения f_1. Поскольку $\tilde{\varphi}_{1\pi}(\beta)=e\Rightarrow\beta=e$, то $\tilde{f}_1^*=\beta\tilde{f}_1^*$. Поэтому $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}$ - инъективно.

(4) Так как $\left[\tilde{f},\tilde{g}\right]\mapsto\left[\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right]$, то представитель класса $\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\mapsto\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)$ - представитель класса. Следовательно, существуют $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_1$, такие что $(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}_1)_{lift}\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)=\left(\tilde{f}_1,\tilde{g}_1\right)$. Теперь опишем гомотопическое поведение функтора классов совпадения. Пусть $\{f_t\}_{t\in I}:X\to Y$, $\{(f_1)_t\}_{t\in I}:X_1\to Y_1$,

$\{\varphi_t\}_{t\in I} : X \to X_1$, $\{(\varphi_1)_t\}_{t\in I} : Y \to Y_1$ - гомотопии, такие что $(\varphi_1)_t \circ f_t = (f_1)_t \circ \varphi_t \ \ \forall t \in I$;
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\{f_t\}"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r, "\{(f_1)_t\}"] & Y_1 \end{tikzcd}.$$

Предложение 1. 13. Пусть $\{\tilde{f}_t\}_{t\in I}$ - поднятия $\{f_t\}_{t\in I}$, $\{\tilde{\varphi}_t\}_{t\in I}$ - поднятие $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ и $\{(\tilde{\varphi}_1)_t\}_{t\in I}$ - поднятия $\{(\varphi_1)_t\}_{t\in I}$. Тогда существует единственное поднятие $\{(\tilde{f}_1)_t\}_{t\in I}$ гомотопий $\{(f_1)_t\}_{t\in I}$, таких что $\tilde{\varphi}_t \circ \tilde{f}_t = (\tilde{f}_1)_t \circ (\tilde{\varphi}_1)_t$ для всех $t \in I$.

Доказательство как в Предложении 1. 3.

Следствие 1. 14. Если $\{g_t\}_{t\in I} : X \to Y$ и $\{(g_1)_t\}_{t\in I} : X_1 \to Y_1$ - гомотопии, такие что $(\varphi_1)_t \circ g_t = (g_1)_t \circ \varphi_t$ для любого $t \in I$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\{g_t\}"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r, "\{(g_1)_t\}"] & Y_1 \end{tikzcd}.$$
Пусть $\{\tilde{g}_t\}_{t\in I}$ - поднятия $\{g_t\}_{t\in I}$, тогда диаграмма
$$\begin{tikzcd} {[\tilde{f}_0, \tilde{g}_0]} \arrow[r, "(\{f_t\},\{g_t\})"] \arrow[d] & {[\tilde{f}_1, \tilde{g}_1]} \arrow[d] \\ {[(f_1)_0, (g_1)_0]} \arrow[r, "(\{(f_1),(g_1)\})"] & {[(\tilde{f}_1)_1, (\tilde{g}_1)_1]} \end{tikzcd}$$
коммутативна.

Вертикальные стрелки – это отображения $(\varphi_0, (\varphi_1)_0)_{coin}$ и $(\varphi_1, (\varphi_1)_1)_{coin}$ соответственно, а $\{(\tilde{g}_1)_t\}$ - единственное поднятие $\{(g_1)_t\}$, такое что $(\tilde{g}_1)_t \circ \tilde{\varphi}_t = (\tilde{\varphi}_1)_t \circ \tilde{g}_t$ для всех $t \in I$.

Список литературы:

1. R. Brooks, Coincidences, roots and fixed points. Doctoral Dissertation, Univ. of California, L. A., 1967.

2. B. Jiang, Lectures on Nielsen Fixed Point Theory, Contemporary Mathematics, 14, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1983.

A RELATIVE REIDEMEISTER THEORY FOR COINCIDENCES. I

Roubachkina E. V.

(Russia, Moscow)

Often, the minimum number of coincidences among all maps homotopic to (f, g) can be computer from the Nielsen number. The problem is that it may be difficult to compute $N(f, g)$. The Reidemeister number $R(f, g)$ is an upper bound for $N(f, g)$ that is often a useful estimate of it. Using the liftings of (f, g) and suitably defined liftings of the restriction of (f, g) to subspace, we define the Reidemeister number corresponding to relative Nielsen number. Our Reidemeister number is upper bound for, and, if the spaces are Jiang, equal to the respective Nielsen number. We show that this number have many properties analogous to those of classical Reidemeister number.