ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Кустова В. И.

(Россия, Москва)

Приводится новый метод решения общей задачи линейного программирования. На каждом шаге алгоритма (за исключением последнего шага) отыскивается приближенное решение, которое не удовлетворяет, по крайней мере, одному из ограничений исследуемой задачи, и определяется совокупность активных ограничений, соответствующих этому решению. Обнаруженные на определенном шаге избыточные ограничения в дальнейших вычислениях не учитываются. Оптимальное решение находится на последнем шаге. Доказывается, что число шагов конечно и не превышает минимума из числа переменных и количества ограничений.

В данной работе предлагается новый метод для решения общей задачи линейного программирования, записываемой в виде: найти минимум линейной функции

$$J(x) = c^T x\left[0,1\right] \qquad (1)$$

на множестве $X = \{x \in R_+^n : Ax \geq b\}$, (2)

где $c \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$, R_+^n - неотрицательный ортант n-мерного евклидового множества. Точку $x^* \in X$ назовем решением задачи (1)-(2), если $c^T x^* = \min\limits_{x \in X} c^T x$. Введем расширенную прямоугольную матрицу $D = \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & -b \end{bmatrix}$ размера $(n+m)\times(n+1)$, где E – единичная матрица порядка n. Пусть D_k - квадратная подматрица порядка $n+1$ матрицы D, причем D_{k-1} и D_k ($k \geq 2$) отличаются друг от друга лишь одной строкой. Если в матрице

D_{k-1} этой строкой является одна из строк матрицы [E 0], то в матрице D_k данная строка есть одна из строк матрицы [A $-b$]. Первые n строк матрицы D_1 образуют матрицу [E 0], а последняя (n+1)-я строка является некоторой i-й строкой матрицы [A $-b$], у которой $b_i \neq 0$. Таким образом, D_1 – невырожденная матрица. Замечаем, что на каждом шаге предлагаемого для решения задачи (1)-(2) алгоритма строятся лишь невырожденные матрицы D_k.

Если обозначить через d_{ip}^{k} и g_{ip}^{k} элементы соответственно матриц D_k и D_k^{-1}, расположенные на пересечении их i-й строки и p-го столбца, и учесть, что на каждом k-м шаге в матрице D_k изменяется лишь одна строка, например, с номером r, т.е. $d_{ip}^{k-1} = d_{ip}^{k}$ для всех $1 \le i \le n+1$ и $1 \le p \le n+1$ и $i \neq r$, то связь между элементами g_{ip}^{k} и g_{ip}^{k-1} можно выразить следующим образом (см. [1]):

$$g_{ir}^{k} = \frac{g_{ir}^{k-1}}{h_r}, \text{при } p \neq r \text{ имеем } g_{ip}^{k} = g_{ip}^{k-1} - g_{ir}^{k} \times h_p, \text{где } h_p = \sum_{s=1}^{n+1} d_{rs}^{k} g_{sp}^{k-1}. \qquad (3)$$

Заметим, что по данным формулам будут вычисляться элементы g_{ip}^{k} обратной матрицы D_k^{-1} лишь для тех i, которые не являются номерами строк матрицы [E 0] в матрице D_k. Для остальных i имеем: $g_{ip}^{k} = g_{ip}^{k-1} = d_{ip}^{k-1} = d_{ip}^{k}$. Задачу (1)-(2) запишем в виде

$$\min_{x \in X} c^T x, \quad X = \{x \in R^n : D\bar{x} \ge 0\}, \text{где } \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На каждом k-м шаге $(k \ge 1)$ определим вспомогательные задачи

$$\min_{x^k \in X_k} c^T x^k,$$

$$X_k = \{x^k \in R^n : D_k \overline{x^k} \geq 0\}, \text{где } \overline{x^k} = \begin{pmatrix} x^k \\ 1 \end{pmatrix} \in R^{n+1}, \tag{4}$$

и опишем алгоритм нахождения точки x^*, являющейся одним из решений исходной задачи (1)-(2). Этот алгоритм порождает последовательность точек x^0, x^1,…, x^k путем выполнения следующих шагов.

Шаг 0. Если в линейной функции $J(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ все коэффициенты $c_j \geq 0$, то проверяем, является ли нулевая точка x^0 = (0; … ;0) допустимой для исходного множества X . При утвердительном ответе делаем заключение: x^0 = (0; … ;0) - решение задачи (1)-(2), $J(x^0) = 0$, и вычисления завершаем. В противном случае переходим к следующему шагу.

Шаг 1. Последовательно выбираем из исходной системы неравенств одно неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \geq b_l$, в котором $b_l \neq 0$, добавляем его к условиям неотрицательности переменных:, $x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n$ и для каждого $l = 1, \ldots, m$, где $b_l \neq 0$, решаем вспомогательную задачу $l-$го вида (4). Для этого в качестве n+1- й строки матрицы D_1 берется $l-$я строка матрицы [A -b], и вычисляются элементы обратной матрицы D_1^{-1} по формулам:

$g_{n+1\,j}^1 = a_{lj} / b_l$, $1 \leq j \leq n$; $g_{n+1\,n+1}^1 = -1/b_l$; $g_{ij}^1 = g_{ij}^0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$, где g_{ij}^0 - элементы единичной матрицы порядка n+1.

Если окажется, что $g^1_{n+1j} \le 0$ для всех $1 \le j \le n+1$, то делается вывод о неразрешимости рассматриваемой задачи в силу несовместности ее системы ограничений. В этом случае $X = \varnothing$, и вычисления завершаются. В противном случае для каждого $j = 1, \ldots, n$, для которого $g^1_{n+1j} \ne 0$, определяем значение функции $J(x)$: $G_1^j = \dfrac{c_j}{g^1_{n+1j}}$, $1 \le j \le n$, где $g^1_{n+1j} \ne 0$; $G_1^{n+1} = 0$.

Выбираем среди тех $G_1^j, 1 \le j \le n+1$, для которых $g^1_{n+1j} > 0$, минимальное значение: $G_1^{j_l} = \min\limits_{j:\, g^1_{n+1j} > 0} G_1^j$ и проверяем для вспомогательной задачи l –го вида выполнимость условий оптимальности:

$$G_1^p \le G_1^{j_l} \text{ для всех } p : g^1_{n+1p} < 0;\ c_p \ge 0 \text{ для всех } p : g^1_{n+1p} = 0\,. \tag{5}$$

Если хотя бы одно из условий (5) нарушено, то $G_1^{j_l} = -\infty$. Совокупность описанных выше действий повторяем столько раз, сколько в задаче (1)-(2) содержится неравенств с ненулевой правой частью. Далее среди найденных минимальных значений функции $G_1^{j_l}$ вспомогательных задач l –го вида, где $b_l \ne 0$, выбирается наибольшее. Если оно представляет конечное число, то фиксируется номер j_1, соответствующий этому максимальному значению функции: $G_1^{j_1} = \max\limits_{l:\, b_l \ne 0} G_1^{j_l}$ как номер активного ограничения двойственной задачи. Одновременно определяется и номер i_1 активного ограничения прямой задачи, который приравнивается номеру l неравенства, соответствующему $\max\limits_{l:b_l \neq 0} G_1^{j_l}$. Из коэффициентов $a_{i_1 j}$ и правой части $-b_{i_1}$ неравенства с этим номером образуется $n+1$-я строка матрицы D_1: $d_{n+1j} = a_{i_1 j},\ j = 1,\ldots,n; d_{n+1n+1} = -b_{i_1}$, и фиксируются элементы $n+1$-й строки обратной матрицы D_1^{-1}: $g_{n+1j}^1 = a_{i_1 j} \big/ b_{i_1}$, $j = 1,\ldots,n;\ g_{n+1\ n+1}^1 = -1 \big/ b_{i_1}$. Если $\max\limits_{l:b_l \neq 0} G_1^{j_l}$=-∞, то решаем дополнительно еще одну вспомогательную задачу $m+1$-го вида. Определяем элементы $n+1$-й строки обратной матрицы D_1^{-1} этой задачи: $g_{n+1j}^1 = 1/\text{M}$ для каждого $j : c_j < 0$; $g_{n+1j}^1 = 0$ для каждого $j : c_j \geq 0$; $g_{n+1n+1}^1 = 1/M$, где M - большое число; отыскиваем минимальное значение ее функции $G_1^{j_{m+1}} = \min\limits_{j:c_j<0} c_j M$ и приравниваем $j_1 = j_{m+1}; i_1 = m+1$.

Затем строятся приближение $x^1 = (0;\ \ldots\ ;0; x_{j_1}^1\ ;0;\ \ldots\ ;0)$, где $x_{j_1}^1 = \dfrac{1}{g_{n+1j_1}^1}$, а также множества номеров $I_* = \{i_1\}$ и $J_* = \{j_1\}$ активных ограничений соответственно прямой и двойственной задач. Наряду с этими множествами запоминаются номера тех неравенств, которым точка x^1 не удовлетворяет, т.е. $I_H^1 = \{i : a_{ij_1} x_{j_1}^1 < b_i\}$, и количество p таких номеров, т.е. размерность множества I_H^1 приравнивается p. Если $I_H^1 = \varnothing$ и $i_1 \neq m+1$, то точка x^1 есть оптимальное решение исходной задачи; если же $I_H^1 = \varnothing$ и $i_1 = m+1$, то делается вывод о неразрешимости исходной задачи, так как ее функция неограниченна снизу; на этом вычисления прекращаются. В противном случае осуществляется переход на следующий шаг.

Шаг *k*. Перечислим действия, выполняемые на каждом k –м шаге, где $k \geq 2$, в том порядке, в котором они следуют друг за другом с учетом указанных переходов. При этом для описания совокупности некоторых, особенно повторяющихся, действий применим процедуры. Начнем с номера шага k =2.

а) Повторим p раз выполнение следующей процедуры (p - размерность множества I_H^{k-1}).

Процедура 1. Отыскание минимального значения функции вспомогательной задачи. Используя коэффициенты a_{ls} и правую часть b_l нарушенного неравенства с очередным номером $l \in I_H^{k-1}$, определяем элементы r-й строки матрицы D_k, где r приравниваем каждый раз j_{k-1} (j_{k-1} - номер той строки, которая образована из коэффициентов и правой части ограничения, выполненного на предыдущем шаге как строгое неравенство): $d_{rs}^k = a_{ls}, s = 1,\ldots,n$; $d_{r\,n+1}^k = -b_l$. Затем по формулам (3) вычислим для всех $i \in J_* \cup \{n+1\}$ элементы обратной матрицы D_k^{-1}. Для остальных i при всех s=1,…,n+1 имеем $g_{is}^{k} = 0,$ если $i \neq s$, и $g_{is}^{k} = 1$, если $i = s$. При справедливости неравенств $g_{n+1j}^{k} \leq 0$ для всех $1 \leq j \leq n+1$ делается вывод о неразрешимости исходной задачи из-за наличия несовместной системы ограничений, и вычисления завершаются. В противном случае для каждого j, для которого $g_{n+1j}^{k} > 0$, вычисляются значения функции по формулам

$$G_{k}^{j} = \frac{\sum\limits_{q \in J_{*}} c_{q} g_{qj}^{k} + c_{j}}{g_{n+1j}^{k}}$$ для $j \notin J_{*} \cup \{n+1\}$ и $$G_{k}^{j} = \frac{\sum\limits_{q \in J_{*}} c_{q} g_{qj}^{k}}{g_{n+1j}^{k}}$$ для $j \in J_{*} \cup \{n+1\}$.

Среди них выбирается минимальное значение $G_{k}^{j_l} = \min\limits_{j : g_{n+1j}^{k} > 0} G_{k}^{j}$, и фиксируется номер j_l, отвечающий этому значению.

б) **Процедура 2. Выбор активного ограничения прямой и двойственной задачи, а также точки x^k.** Если для каждого $l \in I_{H}^{k-1}$ номер $j_l \notin J_{*} \cup \{n+1\}$, либо для каждого $l \in I_{H}^{k-1}$ номер $j_l \in J_{*} \cup \{n+1\}$, то проведя описанную ниже процедуру 3, находим номер i_k активного ограничения прямой задачи, номер j_k активного ограничения двойственной задачи, точку x^k и множество I_{H}^{k} номеров неравенств, которым точка x^k не удовлетворяет.

Если для некоторых $l \in \overline{I}_{H}^{k-1}$ номер $j_l \notin J_{*} \cup \{n+1\}$, для остальных $l \in \overline{I}_{H}^{k-1}$ номер $j_l \in J_{*} \cup \{n+1\}$, то, выполняя процедуру 3, в которой за множество I_H^{k-1} принимается $\bar{I}_H^{k-1}$, определяем наибольшее значение функции $G_k^{\bar{j}_k}$ и соответствующие ему номера $\bar{i}_k$ и $\bar{j}_k$, а также точку $\bar{x}^k$ и множество номеров $\bar{I}_H^k$ ограничений, нарушенных в этой точке. При $\bar{I}_H^k \not\subset I_H^{k-1}$ за x^k принимаем точку $\bar{x}^k$, $I_H^k = \bar{I}_H^k$, $i_k = \bar{i}_k$, $j_k = \bar{j}_k$. При $\bar{I}_H^k \subset I_H^{k-1}$, снова повторяя процедуру 3, при выполнении которой I_H^{k-1} заменяется множеством $\bar{\bar{I}}_H^{k-1}$, вычисляем с ее помощью наибольшее значение функции $G_k^{\bar{\bar{j}}_k}$, номера $\bar{\bar{i}}_k$ и $\bar{\bar{j}}_k$, точку $\bar{\bar{x}}^k$ и множество $\bar{\bar{I}}_H^k$ номеров неравенств, для которых эта точка является недопустимой. Если при этом оказывается, что $G_k^{\bar{j}_k} \geq G_k^{\bar{\bar{j}}_k}$, то за x^k принимаем точку $\bar{x}^k$, $I_H^k = \bar{I}_H^k$, $i_k = \bar{i}_k$, $j_k = \bar{j}_k$; матрица D_k^{-1} приравнивается обратной матрице, которая была определена ранее вместе с точкой $\bar{x}^k$ при помощи процедуры 3. В противном случае в качестве x^k выбирается точка $\bar{\bar{x}}^k$, $i_k = \bar{\bar{i}}_k$, $j_k = \bar{\bar{j}}_k$, $I_H^k = \bar{\bar{I}}_H^k$.

Если найденный с помощью данной процедуры 2 номер $j_k \notin J_* \cup \{n+1\}$, то расширяем множества активных ограничений прямой и двойственной задачи: $I_* = I_* \cup \{i_k\}$, $J_* = J_* \cup \{j_k\}$, и переходим к выполнению действия:

в) при $j_k \in J_* \cup \{n+1\}$ переопределяем множество $I_* = (I_* / \{\hat{i}\}) \cup \{i_k\}$, где $\hat{i}$ - номер того ограничения, из коэффициентов и правой части которого была образована строка с номером j_k (это ограничение, выполненное как строгое неравенство, можно в силу лемм 1, 2, 3 и 4 не учитывать в дальнейших вычислениях); множество же J_* остается прежним; номеру шага *k* присваиваем значение, равное *k*-1, и переходим к выполнению действия в).

Процедура 3. Определение максиминного значения функции *J*(*x*) и соответствующих этому значению номеров i_k, j_k и точки x^k. Среди вычисленных с помощью процедуры 1 значений $G_k^{j_l}$, $l \in I_H^{k-1}$, выбирается наибольшее

$$G_k^{j_k} = \max_{l \in I_H^{k-1}} G_k^{j_l}.$$

Запоминаются соответствующие этому максимальному значению номера $i_k \in I_H^{k-1}$ и j_k. В качестве D_k^{-1} выбирается матрица, являющаяся обратной для матрицы D_k, в которой j_{k-1}-я строка составлена из коэффициентов $a_{i_k j}$, $j = 1, \dots, n$, и правой части $-b_{i_k}$ нарушенного неравенства с номером i_k. С помощью элементов j_k-го столбца обратной матрицы D_k^{-1} определяются координаты новой точки x^k по формуле:

$$x_j^k = \frac{g_{jjk}^k}{g_{n+1jk}^k}, \ j \in J_* \cup \{j_k\}; x_j^k = 0 \text{ для остальных } j. \tag{6}$$

Одновременно образуется множество номеров неравенств, для которых точка x^k является недопустимой: $I_H^k = \{i : \sum\limits_{j \in J_* \cup \{j_k\}} a_{ij} x_j^k < b_i\}$, причем $i \notin I_*$.

в) При $I_H^k \neq \varnothing$ определяется размерность этого множества, которой затем приравнивается число p; номеру шага k присваивается значение, равное $k+1$, и осуществляется действие а).

Если $I_H^k = \varnothing$, то при $i_1 = m+1$ делается вывод о неразрешимости исходной задачи (1)-(2) в силу неограниченности снизу ее функции; при $i_1 \neq m+1$ проверяется, все ли компоненты $x_j^k \geq 0$ для $j = 1, \ldots, n$. При положительном ответе заключаем, что точка x^k есть оптимальное решение исходной задачи, и на этом вычисления завершаем. При отрицательном ответе среди всех взятых по абсолютной величине отрицательных значений $x_j^k, j \in J_*$, выбирается наибольшее:

$$\left| x_{\hat{j}}^k \right| = \max_{j : x_j^k < 0} \left| x_j^k \right|. \tag{7}$$

В силу следствия 1 $\hat{j}$-ю компоненту оптимального решения x^* можно в дальнейших вычислениях приравнять нулю. Если а) $j_k \notin J_* \cup \{n+1\}$, то в прямой задаче условие неотрицательности $x_{j_k} \geq 0$ заменяется условием $x_{\hat{j}} \geq 0$, и изменяется множество $J_* = J_* / \{\hat{j}\}$;

б) $j_k \in J_* \cup \{n+1\}$, то в прямой задаче ограничение с номером $\hat{i} \in I_*$, выполненное в точке x^k как строгое неравенство, заменяется условием неотрицательности: $x_{\hat{j}} \geq 0$; множество J_* сужается до множества $J_* = J_* / \{\hat{j}\}$.

Далее проводим один раз процедуру 1, при выполнении которой полагаем r равным j_k, $d^k_{r\hat{j}} = 1$; $d^k_{rj} = 0$ для всех $j \in \{1, \ldots, n+1\} / \{\hat{j}\}$. В результате определяются новые элементы обратной матрицы D_k^{-1}, минимальное значение функции $G_k^{j_{\hat{l}}}$ и номер $j_{\hat{l}}$, отвечающий этому значению. При $j_{\hat{l}} \notin J_* \cup \{n+1\}$ расширяем множество $J_* = J_* \cup \left\{ j_{\hat{l}} \right\}$. При $j_{\hat{l}} \in J_* \cup \{n+1\}$ множество I_* сужается до множества $I_* = I_* / \left\{ \hat{\hat{i}} \right\}$, где $\hat{\hat{i}} \in I_*$ - номер ограничения общего вида, коэффициенты и правая часть которого записаны в $j_{\hat{l}}$-ю строку матрицы D_k (в дальнейших вычислениях это ограничение можно не учитывать), и номеру шага k присваивается значение, равное k-1.

Переопределив номер $j_k : j_k = j_{\hat{l}}$, координаты точки x^k по формуле (6) и множество I_H^k номеров неравенств, нарушенных в этой точке, выполняем с самого начала действие а), где полагаем $I_H^{k-1} = I_H^k$ и p приравниваем размерности I_H^k. Дополним предлагаемый алгоритм действиями, которые следует провести при возникновении неучтенных случаев, описанных в следующих замечаниях.

Замечание 1. В случае, когда на *k*-м шаге ($k \geq 1$) обнаружится, что наибольшее среди минимальных значений функции $G_k^{j_l}$ достигается сразу в нескольких точках, представляющих решение одной и той же вспомогательной задачи, то среди них в качестве решения выбирается та, которая является недопустимой для меньшего числа неравенств, особенно неравенств с номерами $l \in I_H^{k-1}$. Если и таких точек окажется несколько, то выбор решения среди них осуществляется произвольно.

Замечание 2. В случае, когда на *k*-м шаге ($k \geq 1$) обнаружится, что наибольшее среди минимальных значений функции $G_k^{j_l}$ достигается сразу в нескольких точках, представляющих решения различных вспомогательных задач определенной группы, то среди них в качестве точки $\bar{x}^k$ либо $\bar{\bar{x}}^k$ выбирается то решение, которое удовлетворяет большему числу неравенств, особенно неравенств с номерами $l \in I_H^{k-1}$. Выбор точки $\bar{x}^k$ либо $\bar{\bar{x}}^k$ производится произвольно среди указанных решений, если на этих решениях происходит нарушение одинакового числа неравенств.

Теперь сформулируем основное утверждение о сходимости предлагаемого алгоритма.

Теорема 1. Число шагов, необходимое для отыскания оптимального решения исходной задачи (1)-(2) с помощью предлагаемого алгоритма, не превышает минимума из числа переменных и количества ограничений этой задачи. При этом число требуемых арифметических операций оценивается величиной, не превосходящей $O(mn^3)$, если $n \le m$, и $O(m^2n^2)$, если $n > m$. Доказательство данной теоремы основывается на следующих дополнительно выведенных утверждениях (см. [2]):

Лемма 1. Для любых $k \ge 1$, $l \in I_H^k$ имеет место соотношение:

$$J(x^{k+1}) = J(x^k) + \lambda_l^{k+1}(b_l - \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j^k).$$

Кроме того, если при добавлении на k+1-м шаге нарушенного ограничения с номером $l \in I_H^k$ множество I_* номеров активных ограничений прямой задачи расширяется, то верно

$$J(x^{k+1}) = J(x^k) + x_{j_l}^{k+1}(c_{j_l} - \sum_{i=1}^{m} a_{ij_l} \lambda_i^k), \; j_l \in \{1,\ldots,n\} \setminus J_* . \tag{8}$$

Здесь x^k и x^{k+1}- оптимальные решения вспомогательных задач вида (4), рассматриваемых соответственно на k-м и k+1-м шагах; λ^k и λ^{k+1}- оптимальные решения соответствующих двойственных задач на k-м и k+1-м шагах; l –номер неравенства в прямой задаче, которому не удовлетворяет точка x^k; j_l- номер неравенства в соответствующей двойственной задаче, которому удовлетворяет точка λ^k. В соотношении (8) значение компоненты $x_{j_l}^{k+1}$ можно также найти из решения задачи минимизации функции одной переменной: $\tilde{J}(x_{j_l}) = J(x^k) + x_{j_l}(c_{j_l} - \sum_{i \in I_*} a_{ij_l} \lambda_i^k)$ на множестве, состоящим из одного неравенства

$$(a_{lj_l} - \sum_{j \in J_*} a_{lj} \frac{\det A_k^j}{\det A_k}) x_{j_l} \geq b_l - \sum_{j \in J_*} a_{lj} x_j^k,\ l \in I_H^k,\ j_l \in \{1,\ldots,n\} \setminus J_*\ ,$$

в котором матрица A_k составлена из коэффициентов системы активных ограничений $\sum\limits_{j \in J_*} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I_*$; остальные $x_j^k = 0$ для $j \in \{1,\ldots,n\} \setminus J_*$; A_k^j – квадратная матрица порядка k, образованная из матрицы A_k заменой в ней элементов a_{ij}, $i \in I_*$, j – го столбца, где соответствующими элементами a_{ij_l}, которые представляют коэффициенты при неизвестной x_{j_l} в исходной системе ограничений .

Замечаем, что решение с помощью предлагаемого алгоритма большинства задач вида (1)-(2), особенно тех, в которых число ограничений общего вида значительно превышает число неотрицательных переменных, характеризуется отличительным свойством. При отыскании решения таких задач на каждом шаге, начиная с $l+1$-го ($l \geq 2$), одно из ограничений типа $\hat{i}$ в системе активных ограничений прямой задачи заменяется нарушенным ограничением. Данная ситуация может повторяться до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение x^*, либо установлено его отсутствие. При каждом повторении подобной ситуации номеру выполняемого шага присваивается прежнее значение, равное $l+1$. В таких случаях верно следующее утверждение.

Лемма 2. Если ограничение, будучи активным, выполняется как строгое неравенство в определенной точке $x^{l+\hat{p}}, \hat{p} \geq 1$, получаемой на $l+1$-м шаге при добавлении очередного нарушенного ограничения к имеющейся системе активных ограничений прямой задачи, то оно уже не нарушится в любой вновь вычисляемой с помощью алгоритма точке $x^{l+p}, p > \hat{p}$, включая оптимальное решение исходной задачи.

Если предположить, что при добавлении на очередном шаге $k+1$-м ($k \geq 2$) шаге нарушенного ограничения с номером $i_{k+1} \in I_H^k$ к имеющейся системе активных ограничений прямой задачи одно из них с номером $\widehat{i} \in I_*$ выполняется как строгое неравенство, то при этом можно установить справедливость следующих утверждений (см. [2]).

Лемма 3. Пусть при получении точек x^l, $l > k+1$, на последующих шагах алгоритма число активных ограничений, как в прямой, так и в двойственной задаче постоянно возрастает. Ограничение же с номером $\widehat{i}$, по-прежнему, не будет нарушаться в каждой вновь определяемой точке x^l.

Лемма 4. Пусть при проведении последующих шагов алгоритма была получена точка $x^l, l > k+1$, в которой одно из активных ограничений с номером $\widehat{\widehat{i}}$, где $\widehat{\widehat{i}} \neq \widehat{i}$, выполняется уже как строгое неравенство. Ограничение с номером $\widehat{i}$ также не будет нарушаться в данной точке.

Следствие 1. Если на l-м шаге ($l \geq 3$) предлагаемого алгоритма одно из активных в двойственной задаче ограничений с номером $\widehat{j}$, найденным с помощью критерия (7), выполняется как строгое неравенство, то $\widehat{j}$-я компонента оптимального решения x^* исходной задачи может быть приравнена нулю.

Список литературы:

1. Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш. Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1987.

2. Кустова В.И. Численный метод решения общей задачи линейного программирования. ВИНИТИ №1093-В2004, 24.06.2004. 50 с.

A DUAL METHOD FOR SOLUTION OF THE GENERAL PROBLEM GENERAL PROBLEMS

Kustova V. I.

(Russia, Moscow)

A new method for solution of the general problem of linear programming is proposed. An approximate solution, which does not satisfied at least one constraint of the investigated problem, is found at each step of the algorithm (except for the last step), and the totality of active constraints corresponding to this solution is determined. Surplus constraints discovered at a certain step are not taken into account in subsequent calculations. The optimal solution is found at the last step. It is proved that the number of steps is finite and does not exceed the minimum of the number of variables and the number of constraints.