ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Доронина Е. Е., Черняев А. П.

(Москва, Долгопрудный)

В работе предполагается, что инвестор может выбирать среди различных активов без учета операционных издержек и налога, причем короткие продажи исключены. Предполагается также, что весь капитал идет на эти инвестиции. Рассматриваемые активы предполагаем безрисковыми (например, облигации). Даже в тривиальной постановке такие задачи представляют интерес, т. к. позволяют ответить на вопрос, какие активы следует включать в портфель, чтобы получить гарантированный процент прибыли и выбрать при этом самый доходный.

Во многих задачах по выбору однопериодичного инвестиционного портфеля нужно определить

$$\max \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \,, \tag{1}$$

где за x_k мы обозначили части капитала инвестора, помещаемого в актив с соответствующими индексами, а за r_k — доходы от соответствующих активов в конце рассматриваемого периода [1].

Предположение о делимости финансовых активов ослаблено тем, что все переменные считаются целочисленными. В этом случак ограничение на бюджет записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = z; \quad x_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{2}$$

Здесь c_k — покупная стоимость единицы ценной бумаги. Кроме ограничений (2) можно ввести дополнительные ограничения на выбранные активы путем задания их верхней и нижней границы

$$0 \leq x_{1k} \leq x_k \leq x_{2k} \,, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k x_k = z \,. \tag{3}$$

В результате приходим к двум задачам (1), (2) и (1), (3). Отметим, что первая задача является частным случаем второй, т.к. из (2) имеем

$$0 \le x_k = \frac{1}{c_k}\left[z - \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i - \sum_{i=k-1}^{n} c_i x_i \right] \le \frac{z}{c_k}.$$

Т. о., если положить $x_{1k} = 0$, а $x_{2k} = z/c_k$, то из (2) следует (3), что и требовалось.

Сначала рассмотрим задачу (1), (3) при $n = 2$. Здесь портфель содержит лишь два актива, и по этой причине мы назовем его примитивным. Линейное диофантово уравнение в (3) в этом случае будет содержать лишь две целочисленные переменные x_1 и x_2. Все решения этого уравнения выписываются в виде [2, с.340]

$$x_1 = x_{10} - bt, \quad x_2 = x_{20} + at; \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Здесь

$$x_{10} = (-1)^{k-1} cQ_{k-1}, \quad x_{20} = (-1)^{k-1} cP_{k-1}, \tag{5}$$

$$a = c_1/d, \quad b = c_2/d, \quad c = z/d, \quad d = \text{НОД}(c_1, c_2), \tag{6}$$

НОД — наибольший общий делитель, а P_{k-1}, Q_{k-1} — числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби при разложении a/b в правильную цепную дробь [2,3].

Из (4), (5) и (6) видно, что неравенствам из (3) при $k = 1$ и $k = 2$ удовлетворяют лишь конечное число найденных пар чисел. Это следует из того, что оба числа (5) имеют один и тот же знак и, как это видно из (4), одна из найденных целочисленных переменных убывает, а другая возрастает. Из найденного конечного множества целочисленных решений (4), (5), (6) мы находим те, которые удовлетворяют условию (1), т.е. оптимальные решения.

Если рассматривать задачу по выбору однопериодичного портфеля, который содержит n активов, то линейное диофантово уравнение в ограничении на бюджет, см. (2) и (3), будет содержать n независимых целочисленных переменных. Оставляя в левой части уравнения лишь две любые выбранные переменные, например x_1 и x_2, переносим остальные переменные в правую часть и считаем свободными, т.е.

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = z - \sum_{k=3}^{n} c_k x_k. \tag{7}$$

Для каждого значения свободных переменных можно выписать все значения выбранных переменных, как мы это сделали в случае задачи о примитивном портфеле, находя начальное решение с помощью предпоследней подходящей дроби при разложении *a/b* в правильную цепную дробь [2,3]. При этом в третьей формуле (6) *z* должно быть заменено на правую часть уравнения (7). Аналогично предыдущему, описываем все множество целочисленных решений, удовлетворяющих неравенствам в ограничениях на бюджет в (2) и (3), которое также как и в случае примитивного портфеля будет конечным. Как и в случае задач о примитивном портфеле, из найденного конечного множества решений остается лишь выбрать оптимальные, т.е. те, которые обеспечивают выполнение условия (1).

Список литературы:

1. Шомполов А. И. О некоторых моделях управления инвестициями // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. М.: МФТИ, 1997. С.154–163.
2. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. — М.: Наука, 1983. 312 с.
3. Андронов И. К., Окунев А. К. Арифметика рациональных чисел. — М.: Просвещение, 1971. 399 с.

THE APPLICATION OF THE CHAIN FRACTIONS TO THE INTEGER MODEL OF THE CHOICE OF THE INVESTMENT PORTFOLIO

Doronina E. E., Chernyaev A. P.

(Moscow, Dolgoprudny)

In the paper we suppose, that the investor can select among the different asset without regard to operational expense, and tax, where we except the short sales. We suppose too, that al capital is aimed at these investations. We consider only riskless asset (for example, bonds). These problems are interesting even in the trivial statement, as with the help of these problems we can answer to the question, which asset should be include to the portfolio, that to obtain the guaranteed percent and to make optimal choice.