О НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПОВЕДЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ В КРИЗИСНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Щетинин Е. Ю., Назаренко К. М., Парамонов А. В.

(Россия, Москва)

Современные финансовые рынки характеризуются высокой степенью взаимосвязей и зависимостей. В результате наступления экстремальных событий, существенно влияющих на состояние одного из них, влекущих за собой значительные колебания рыночных котировок, как правило, происходит распространение подобных явлений в той или иной степени и на другие рынки.

В настоящей работе исследованы статистические закономерности возникновения масштабных кризисных состояний финансовых рынков с помощью математических методов стохастического анализа. В работе предложены новые инструментальные методы моделирования и оценивания статистических структур существующих и возникающих в периоды кризисов связей на мировых финансовых рынках. На основе использования предложенных методов впервые обнаружены и исследованы новые феномены в поведении финансовых рынков, построены новые математические модели статистических структур зависимостей, возникающих в кризисные периоды, проведен также компьютерный анализ их эффективности при описании поведения финансовых рынков в кризисные периоды.

Статистические закономерности возникновения экстремальных событий. В последние годы характер динамики глобальных финансовых рынков качественно изменился. На смену монотонно меняющимся тенденциям финансовых показателей пришли их скачкообразные изменения. За счет увеличивающихся амплитуд разнонаправленных движений стоимости одного или нескольких показателей до их критических значений происходит наступление экстремальных событий на одном или сразу нескольких финансовых рынках. Иногда наблюдается цепочка таких событий, например, южно-азиатский кризис 1997 г., последовавший за ним кризис в России в 1998 г. и в Латинской Америке. Подобные сценарии развития кризисов наблюдаются все чаще, причем в различных секторах рынков капитала. Последний пример из России — банковский кризис лета 2004 г. Принудительный отзыв лицензии у «Содбизнесбанка» вызвал последовательно банкротство Гута-банка, Кредиттраста, Павелецкого, Диалог-Оптим, повлек за собой трудности с депозитами физических лиц у крупнейших российских банков, таких как Альфа-банк и ряда других. В отсутствие внешних дестабилизирующих факторов, несмотря на локальные кризисы или отдельные экстремальные события на рынках капитала (например, невозврат кредита, банкротство банка), подобные цепочки возникают довольно редко, что свидетельствует об их неявном, скрытом характере, проявляющем себя лишь при некоторых условиях или ситуациях. Возникший интерес к ним неслучаен, поскольку возникновение кризиса в одном секторе капитала потенциально существенно повышает вероятность его распространения на другие, внешне никак не связанные с ним секторы рынка капитала.

Такие скрытые статистические зависимости будем называть контагионами (contagion). Контагион математически можно охарактеризовать как вероятностную меру зависимости одной компоненты исследуемой структуры от другой ее компоненты при условии, что значение показателя второй превысило некоторую известную величину или порог. Пусть случайные величины Z_1, Z_2 обозначают показатели двух финансовых рынков, например, логарифмические приращения значений их индексов рисковой стоимости и т.д. Тогда эффект наступления или присутствия контагиона можно охарактеризовать с помощью следующего условия

$$P\left(Z_1 > z_1 \middle| Z_2 > z_2\right) > P\left(Z_1 > z_1\right), \tag{1}$$

где величины z_1, z_2 — соответствующим образом выбранные пороги или мера критичности преодоления этого значения соответствующим показателем. Выбор порогов можно осуществить, например, на основе методологии Value at Risk (*VaR*). Пусть α — вероятность того, что значение случайной величины Z превысит число $z \in R$. Тогда $\alpha = P(Z > z) = 1 - F(z)$ и $VaR(Z,\alpha) = F^{-1}(1-\alpha)$ является α -квантилью функции распределения $F(z)$. Положим $z_1 = VaR(Z_1,\alpha)$ и $z_2 = VaR(Z_2,\alpha)$.

В рамках концепции копул [1] выражение (1) можно переписать в следующем виде

$$\frac{1-u-u+C_F(u,u)}{1-u} > \alpha = 1-u, \tag{2}$$

где $u = F_1(VaR(Z_1,\alpha)) = F_2(VaR(Z_2,\alpha))$. Заметим, что при независимости левая часть (2) равна $(1-u)$, а при усилении зависимости контагион возрастает.

Эффективным инструментом в исследованиях свойств контагиона являются показатели предельных зависимостей в структурах статистических связей. Рассмотрим следующий предел

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \lambda_U(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^+} P\left(Z_2 > F_1^{-1}(1-\alpha) \middle| Z_1 > F_2^{-1}(1-\alpha)\right), \tag{3}$$

где $\alpha \in (0,1]$, $F_1(z) = P(Z_1 < z)$, $F_2(z) = P(Z_2 < z)$. Если для заданной функции копулы $C_F(u,v)$ и совместной функции распределения F известна копула функции выживания $\tilde{C}_F(u,v)$

$$\tilde{C}_F(u,v) = C_F(1-u,1-v) = P\left(Z_1 > F_1^{-1}(z), Z_2 > F_2^{-1}(z)\right), \tag{4}$$

то выражение (3) принимает следующий вид

$$\lambda_U = \lim_{u\to 1} \frac{\tilde{C}(u,u)}{1-u}. \tag{5}$$

Число λ_U также называют коэффициентом асимптотической зависимости в правой верхней части области определения копулы [3]. Случайные величины Z_1 и Z_2 называются асимптотически зависимыми в верхней правой части области определения, если предел (3) существует и $\lambda_U(\alpha) \in (0,1]$, и асимптотически независимыми, если $\lambda_U(\alpha) = 0$. Будем также называть его коэффициентом верхней хвостовой зависимости. Аналогично можно записать выражение и для меры асимптотической зависимости на нижнем хвосте функции копулы

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0} \frac{C_F(u,u)}{u}. \tag{6}$$

Число λ_L назовем коэффициентом асимптотической зависимости в левой нижней части области определения копулы или коэффициентом нижней хвостовой зависимости [3]. Будем также говорить, что случайные величины асимптотически зависимы в нижней левой области определения копулы, если $\lambda_L \in (0,1]$ и являются асимптотически независимыми, если $\lambda_L = 0$.

Кроме контагиона вида (1) также представляет значительный интерес вычисление вероятности наступления кризиса на обоих рынках

$$P\left(Z_2 > z_2, Z_1 > z_1 \middle| Z_2 > z_2\, or\, Z_1 > z_1\right), \tag{7}$$

для некоторых больших значений $z_1, z_2 = F_2^{-1}(v)$. Легко показать, что выражение (7) можно переписать в виде

$$\lim_{u,v \to 1} P\left(Z_2 > F_2^{-1}(v), Z_1 > F_1^{-1}(u) \middle| Z_2 > F_2^{-1}(v)\, or\, Z_1 > F_1^{-1}(u)\right) = \\ = \frac{1 - u - v + C(u,v)}{1 - C(u,v)}. \tag{8}$$

Контагионы вида (1) будем называть контагионами первого порядка, а (7),(8) будем называть контагионами второго порядка.

В результате проведенных исследований нами обнаружен новый феномен в поведении рынков в условиях воздействия на него внешних кризисных факторов. При переходе из стабильного состояния в кризисное происходит изменение модели структуры статистической зависимости показателей, также как и их частных распределений. Например, если, условно говоря, в стабильном состоянии структуру зависимости можно охарактеризовать многомерным нормальным законом с частными нормальными распределениями, то, в результате наступления некоторого экстремального события, модель многомерной функции распределения меняется на другую структуру зависимости из другой области притяжения. Характерными структурами зависимости в таких случаях являются копулы экстремального типа [3]. Так, с целью исследования этого явления мы провели исследования различных секторов мировых рынков капитала: рынок валют FOREX, ведущие мировые фондовые индексы, рынки срочных контрактов и ряд других. В частности на рынке валют FOREX при наступлении эксцедентных событий наблюдали переход структуры зависимости USD/EURO от модели Франка к моделям структур из области притяжения распределений экстремальных величин. Кроме того, происходит асимметризация структуры зависимости, что отражается в двух аспектах. Первый: хвосты соответствующей функции плотности копулы обладают различным весом, т.е $\lambda_U \neq \lambda_L$. Второй: сама функция плотности копулы становится асимметричной. Мы исследовали классы моделей совместных функций распределения для описания обнаруженных эффектов и выяснили, что наилучшим образом для этого подходят архимедовы копулы и классы мета-эллиптических распределений. Мета-эллиптические распределения использовались нами для моделирования контагиона со сменой области притяжения частных распределений. Нами предложено скошенное мета-эллиптическое распределение Стьюдента в следующем виде:

$$f_{\mathbf{X}}(x) = 2t_n(x,\nu)\,T\left(\beta^T\omega^{-1}(x-\xi)\left(\frac{\nu+n}{Q+\nu}\right)^{1/2},\nu+n\right),$$

где $t_n\left(x,\nu\right)=\dfrac{\Gamma\left(\left(\nu+n\right)/2\right)}{\left|\Omega\right|^{1/2}\left(\pi\nu\right)^{n/2}\Gamma\left(\nu/2\right)}\left(1+Q\left(x\right)/\nu\right)^{-\left(\nu+n\right)/2}$,

$Q\left(x\right)=\left(x-\xi\right)^{T}\Omega^{-1}\left(x-\xi\right)$, $\Omega=\left(\omega_{ij}\right)$.

В качестве частных распределений нами использовались одномерные скошенные эллиптические распределения T с $\left(\nu+n\right)$ степенями свободы. Свойства этого распределения позволяет также моделировать тяжелые хвосты и асимметрию эмпирических распределений финансовых показателей. На рис. 1 приведены графики отрицательных дневных лог-приращений значений американского фондового индекса DJI 1984–2004 гг. и функции $f_{\mathbf{X}}\left(x\right)$, $n=1$.

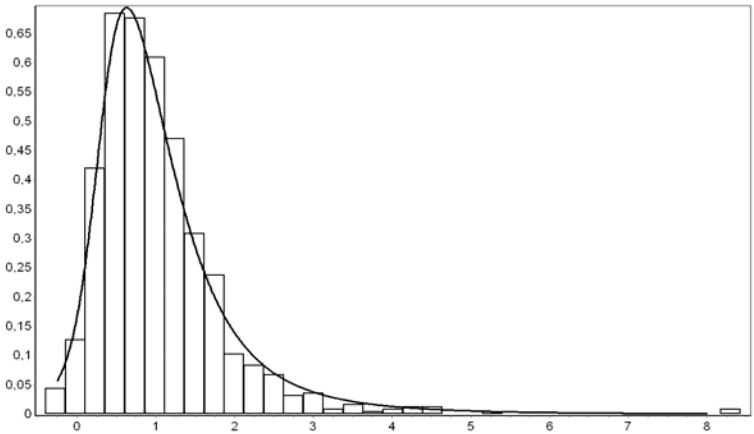

Рис. 1. Гистограмма отрицательных дневных лог-приращений индекса DJI и плотности скошенного распределения Стьюдента

Для моделирования различных типов асимметрии исследуемых многомерных структур статистических связей, возникающей в результате наступления контагиона, мы предложили использовать архимедовы копулы, а именно те модели из их класса, которые сами являются или принадлежат области притяжения экстремальных копул. Такими свойствами, например, обладают архимакс-копулы [4]. С этой целью мы исследовали, в частности, модели копул BB1, BB4 и BB7 [3] и провели их сравнительный анализ. В результате нами построена универсальная модель копулы, позволяющая описывать контагионы с различными типами асимметрии.

Риск-менеджмент компании в условиях воздействия на нее неблагоприятных внешних факторов. В качестве нового подхода к управлению рисками в условиях воздействия внешних неблагоприятных факторов, влекущих за собой значительные, экстремальные изменения стоимости предприятия, мы разработали метод инклюзии. Поскольку стоимость в конечном итоге отражает основные направления и эффективность управления, то в случае катастрофических падений стоимости, необходимо перейти на такое управление компанией, которое бы в конечном итоге стабилизировало ее стоимость. В результате смена управления реализуется в виде новых значений показателей компании. новые данные должны компенсировать негативные изменения стоимости и стабилизировать положение компании. Таким образом, новые искусственные данные фактически должны отражать те изменения, которые нужно внести в управление деятельностью компании. Однако, поскольку неизвестно, какое именно управление нужно предпринять для этого, мы создаем континуум-сценарии управления компанией с целью дальнейшего анализа ее наиболее оптимального развития.

Для реализации на практике метода инклюзии нами созданы алгоритмы генерирования структурно зависимых статистических данных с возможностью их инсталляции в уже существующие статистические структуры данных. Полагая, что после воздействия шокового фактора распределение показателей стоимости становится экстремальным или попадает в область притяжения экстремальных величин, генераторы инсталляции искусственных данных теоретически опираются на теорию экстремальных копул [2]. Предполагается, что на множестве статистических данных определена некоторая конечная радонова мера $\mu\left(\left[0,\mathbf{x}\right]^c\right)$, $\mathbf{x}\in\mathbf{R}_+^n$, обладающая свойством однородности, и существует обобщенное распределение экстремальных величин $G^*(\mathbf{x})$ в виде экспоненциального представления С. Резника [2]

$$G^*(\mathbf{x}) = \exp\left(-\mu\left([0,\mathbf{x}]\right)^c\right) \tag{9}$$

Выбор модели генератора определяется конкретными условиями, а также свойствами исходных данных и их структуры зависимости. Место инсталляции как правило является наиболее проблемным, с точки зрения управления компанией, участком. Триггерные точки, как мы их назвали, служат для тестирования устойчивости компании и построения карты сценариев ее развития.

Кроме этого, в наш метод инклюзии входит такой важный инструмент как анализ группы шоковых факторов, наиболее значимым образом влияющих на устойчивость компании. Это позволит прогнозировать и выбирать наиболее вероятные стратегии антикризисного управления компанией в случае наступления того или иного фактора из этой группы. В частности, это сделает более эффективным использование таких инструментов ограничения рисков как свопы и опционы, а также различные схемы перестрахования (stop-loss, excess-of-loss и др.). Так, одним из наиболее широко используемых инструментов обеспечения финансовой устойчивости страховой компании является перестрахование. Функция перераспределения ущерба может иметь следующий вид

$$g(Loss, ALAE) = \begin{cases} 0, \quad Loss \le R \\ Loss - R + \dfrac{Loss - R}{Loss} ALAE, \quad Loss > R, \end{cases} \tag{10}$$

где R — величина собственного удержания страховщика, $Loss$ — общий размер предъявленных перестраховщику выплат, $ALAE$ — издержки на осуществление его деятельности [4]. Для вычисления оценки премии π, получаемой перестрахователем как математического ожидания случайной величины $g(Loss, ALAE)$, мы построили математическую модель совместного распределения $(Loss, ALAE)$ и оценили статистическую структуру зависимости между ними на основе концепции копул [1]. Вводя структуру зависимости между $Loss$ и $ALAE$, мы можем вычислить как эмпирическую оценку $\tilde{\pi}$ так и получить ее с использованием модели копулы C [4]

$$\tilde{\pi} = \tilde{E}\left(g\left(Loss, ALAE\right)\right) = \int\limits_{R}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} g\left(s,t\right)\tilde{p}_{Loss,ALAE}\left(s,t\right)dsdt\,, \quad (11)$$

где $\tilde{p}_{Loss,ALAE}\left(s,t\right)$ — оценка совместной плотности распределения пары $\left(Loss, ALAE\right)$.

$$\tilde{p}_{Loss,ALAE}\left(s,t\right) = \tilde{p}_{Loss}\left(s\right)\tilde{p}_{ALAE}\left(t\right)\frac{\partial^2 C\left(\tilde{F}_{Loss}\left(s\right),\tilde{G}_{ALAE}\left(t\right)\right)}{\partial s \partial t}. \quad (12)$$

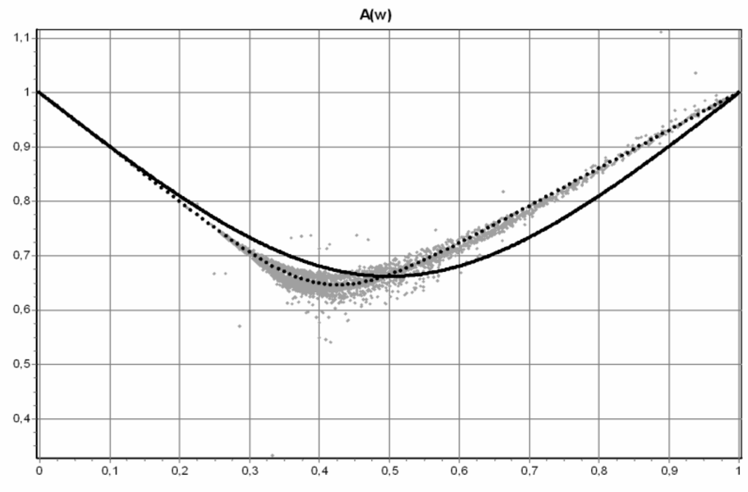

Рис. 2. Графики моделей функции $A(\omega)$ $\left(Loss, ALAE\right)$. – логистическая модель, --- модель (13), ***- эмпирические данные.

Проведенный анализ результатов расчетов показал, что независимость $\left(Loss, ALAE\right)$ приводит к недооценке величины премии, тогда как оценка $\tilde{\pi}$ при условии полной зависимости является слишком консервативной. Оценки $\tilde{\pi}$, полученные в предположении наличия зависимости вида (15), (16) доставляют наилучшее приближение премии π. В качестве модели копулы мы предложили обобщение асимметричной логистической модели [4] с функцией зависимости

$$A(\omega)=\left(\left(\theta(1-\omega)\right)^{\alpha}+(\varphi\omega)^{\alpha}+\delta^{\alpha}\left(\omega(1-\omega)\right)^{\alpha/2}\right)^{1/\alpha}-\theta(1-\omega)-\varphi\omega+1. \quad (13)$$

$0\le\delta\le 1$, $0<\varphi\le 1$, $0\le\theta\le 1$, $\alpha\ge 1$.

На рис. 3 приведена плотность копулы этой модели, описывающей структуру зависимости $(Loss, ALAE)$.

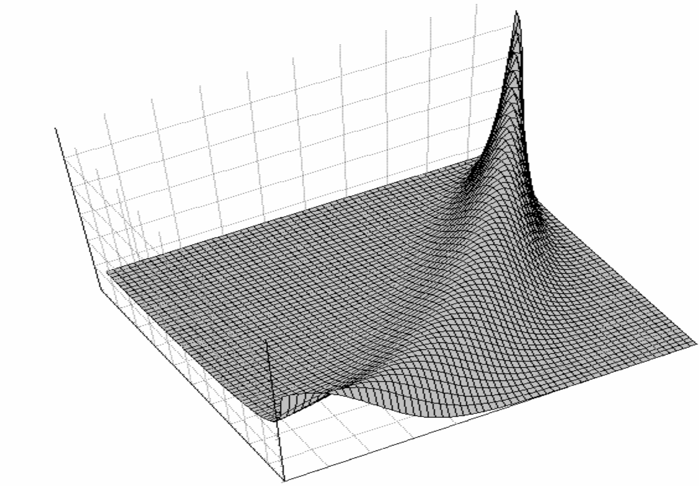

Рис. 3. Плотность копулы обобщенной асимметричной логистической модели функции зависимости (17)

Все выше сказанное позволяет нам сделать вывод о том, что применение представленных в докладе инструментальных методов стохастического анализа экстремальных событий позволяет гибко и эффективно управлять финансовой компанией в условиях воздействия на нее неблагоприятных внешних факторов и планировать ее дальнейшую успешную деятельность.

Список литературы:

1. Nelsen R.B., An introduction to copulas. — Springer, N.Y., 1999.
2. Resnick S. Extreme values, regular vatiation and point processes. — Springer, New York, 1987.
3. Joe H., Multivariate models and dependence concepts. — Chapman and Hall, London, 1997.
4. Парамонов А. В., Казаков Я. О., Щетинин Е. Ю., Анализ структуры статистической зависимости размеров выплат по медицинским страховым полисам на примере российских страховых компаний, 7-я научная конференция МГТУ”СТАНКИН” и “Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ”СТАНКИН”-ИММ РАН”, Сборник докладов. — М.: Янус-К, ИЦ ГОУ.

ON STATISTICAL PROPERTIES OF FINANCIAL MARKETS IN CRISIS PERIODS

Shchetinin Eu. Yu., Nazarenko K. M., Paramonov A. V.

(Russia, Moscow)

Financial markets in last decades are characterised by strong linkages and in particular by the propagation of financial crises from one to others. The aim of this work is to investigate extreme statistical dependence structures in financial crises. We found new empirical phenomena of asymmetrisation of these structures when extreme events occurs. We propose new methods for modeling and estimation of statistical dependence structures on base of copulas and extreme value theory.