МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Солодова Е. А., Антонов Ю. П.

(Россия, Москва)

В статье обсуждается возможность построения единой системы моделей различного иерархического уровня в педагогике. Методологическим основанием моделирования является синергетика. Обсуждаются результаты моделирования различных иерархических уровней. Показано, что параметром порядка модели нижнего уровня – уровня усвоения знания конкретным обучаемым является его память. Подобные системы описываются уравнениями с запаздывающим аргументом, обладающими целым рядом специфических свойств, что делает их чрезвычайно привлекательными для моделирования интеллектуальных систем.

В педагогику сегодня пришли методы моделирования, принятые в общей теории систем. Система высшего образования сложна, нелинейна, открыта и переживает сегодня этап неустойчивого бифуркационного развития — поиска дальнейших путей, поэтому единственной адекватной методологией моделирования является синергетическая методология.

В системе образования различают несколько иерархических уровней моделирования.

Модель макроуровня системы образования связывает макрохарактеристики развития нации, такие, как демографический показатель, уровень развития отраслей народного хозяйства с уровнем образования страны. Следовательно, модель макроуровня определяет концепцию развития системы высшего образования в России. В Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша разработана макромодель высшего образования [1]. Рассмотрим более простую с точки зрения математики и более общую концептуально модель, сконструированную на основе вербальной модели, предложенной известным в России политологом, доктором философских наук А. С. Панариным [2]. Формализуем эту модель в терминах математики и проанализируем ее. Система неравенств (1), с точки зрения математики, есть концептуальная, мягкая математическая модель. По смыслу — эта модель есть условие выживаемости нации, безопасности России.

$$\begin{cases} \dfrac{d\,x_{межотр.}}{d\,t} > \dfrac{d\,x_{отр.}}{d\,t}, \\ \dfrac{dx_{фундам.}}{dt} > \dfrac{dx_{прикл}}{dt}, \\ \dfrac{N_{молод.}}{N_{\Sigma}} > 0,5, \\ \dfrac{d\,T_{учебы}}{dt} > \dfrac{d\,T_{работы}}{dt}, \\ \dfrac{d\,T_{досуга}}{dt} > \dfrac{d\,T_{учебы}}{dt}. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое неравенство в системе (1) есть требование более высоких темпов роста межотраслевого знания по сравнению с отраслевым знанием. Второе неравенство следует читать так: «Темпы роста фундаментального знания должны превышать темпы роста прикладного знания». Следующее неравенство формулирует демографическое требование, состоящее в том, что доля молодежи в общем составе населения должна превышать половину. Четвертое неравенство: темпы прироста времени учебы должны быть больше темпов прироста времени работы. Последнее неравенство в системе (1) — требование более высоких темпов прироста досугового времени по сравнению с временем учебы.

Обратим внимание на то, что в формулировке условий безопасности нации задействовано всего пять параметров. Это и есть параметры порядка макромодели.

Второе важное обстоятельство связано с тем, что необходимые условия выживаемости нации связаны с условиями реформирования системы образования страны.

Обратим также внимание на то, что в пяти неравенствах системы (1) выражены принципы построения всей дидактической системы высшего образования: неравенства 1 и 2 — суть требования к содержанию обучения (междисциплинарный характер обучения и ведущая роль фундаментальных наук), таким образом, эти неравенства организуют деятельность вуза по выработке квалификационных требований, учебной программы, учебных и тематических планов вуза; неравенство 3 определяет возрастной состав обучаемых; неравенство 4 выражает принцип непрерывного образования, принцип саморазвития, формализует систему дополнительного образования; неравенство 5 формализует воспитательную сферу.

Продолжим процедуру моделирования, перейдя на следующий иерархический уровень — средний, моделирующий качество образования на выходе конкретного вуза. Здесь вступают в силу фрактальные отношения: показатель качества деятельности вуза таков же, как показатель качества обучения группы. Такая модель подробно описана в [3]. В качестве параметра порядка модели массового обучения принята величина $N(t)$, характеризующая отношение численности студентов, приходящихся на одного преподавателя в группе, к конкурсу в данном вузе, выражаемому в величине человек/место. Такая величина $N(t)$ является обратной к показателю качества вуза и характеризует показатель деградации качества обучения. Математическая модель в этом случае представляет собой логистическое уравнение (2):

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{N_{пред.}}\right). \qquad (2)$$

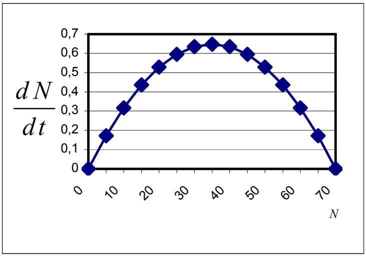

Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (3)

Для конкретных данных мониторинга одного из технических вузов Москвы указанное уравнение запишется в виде

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.037N\left(1 - \frac{N}{70}\right). \quad (3)$$

Это уравнение имеет аналитическое решение, фазовый портрет которого представлен на рис. 1.

Анализ данной модели позволил сделать ряд выводов:

- для конкретного вуза наблюдается устойчивая тенденция к снижению качества обучения;
- одним из основных факторов, обусловливающих снижение качества обучения, является рост численности обучаемых в каждой учебной группе;
- введен системный количественный показатель качества обучения в вузе $N_0 = 1 / N$, характеризуемый количеством педагогов, приходящихся на одного обучаемого.

Понятно, что сокращение численности учебной группы положительно сказывается на качестве обучения, однако речь идет о массовом образовании, следовательно, возникает вопрос о максимальном числе обучаемых в группе. Актуальным является также вопрос о рациональном сочетании обучаемых разного уровня подготовки в учебных группах.

Для определения оптимальной структуры учебной группы в технических вузах разработана математическая модель в виде нелинейного степенного уравнения [3]. Эта модель позволяет определить максимальное количество обучаемых в группе с помощью неравенства вида (4)

$$N \leq (2VT)^{\frac{1}{2}} = sup\ N, \quad (4)$$

где V — производительность труда обучаемого [операций/час]; T — продолжительность занятия.

Анализ этой модели позволил установить, что в случае сильной группы с производительностью труда студентов, равной производительности труда преподавателя, в наиболее напряженном режиме обучения в форме деловой игры, семинара или практического занятия численность обучаемых в группе должна составлять 12 – 13 человек. Если группа состоит из студентов, производительность труда которых вдвое ниже, чем у преподавателя, то для достижения прежнего коэффициента усвоения численность группы должна быть сокращена до 6-7 человек. В случае смешанной группы неравенство, определяющее оптимальное соотношение сильных и слабых студентов, запишется в виде

$$(2VT)^{\frac{1}{2}} \geq N_1 + 2N_2, \qquad (5)$$

где N_1 — количество сильных студентов в группе, N_2 — количество слабых студентов в группе.

Подробный анализ выводов, полученных из моделей (4) и (5), можно найти в [3, 4].

Моделью следующего иерархического уровня — нулевого уровня — является модель, описывающая отношения «педагог – обучаемый». Это модель индивидуального обучения, т.е. собственно дидактическая модель обучения. Подробный анализ такой модели [4] приводит к выводу о том, что основой процесса обучения является память обучаемого.

Следовательно, наиболее адекватной для описания процесса обучения моделью является математическая модель с памятью, описываемая дифференциальным уравнением вида [5]

$$\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t - T_{запаздывания}) = b(t), \qquad (6)$$

где x — количественная характеристика усвоенной в процессе обучения информации, $b(t)$ — количественная характеристика потока входной информации, K — индивидуальный коэффициент восприятия информации, $T_{запаздывания}$ — индивидуальное время запаздывания в восприятии информации.

Для решения уравнения с памятью необходимо задать так называемую «начальную функцию» φ (t) для интервалов времени $t_0 - \tau(t) \le t \le t_0$. Функция φ ($t$) является параметром порядка указанной модели и характеризует память системы, накопленную к началу момента обучения в звене запаздывания.

Анализ математической модели в этом случае позволил сделать ряд важных выводов дидактического характера относительно широко обсуждаемого сегодня — темп обучения, оптимальная продолжительность дистанционного урока, успешность его усвоения зависят от индивидуальных свойств обучаемого, которые количественно оцениваются системным показателем качества обучения, названным индивидуальным «коэффициентом обучаемости» L: $L = KT_{запаздывания}$. Так, например, показано, что в диапазоне значений L = 0,4 – 1, время усвоения определенной порции информации при заданном коэффициенте усвоения является минимальным. По всей видимости, эти значения параметра L являются характеристикой «среднего» обучаемого. Важно отметить, что в том же диапазоне изменения параметра L, наблюдается и максимальная точность в восприятии входной информации. Расчеты показывают [8], что в случае модели белого шума для флуктуаций запаздывания, наименьшая дисперсия ошибки восприятия входной информации возникает в том же диапазоне значений L = 0,4 – 1. Подробный анализ модели нулевого уровня приведен в [3, 4].

Следующим шагом на пути приближения модели к реальному процессу обучения является учет нелинейного характера изменения коэффициента восприятия K от объема накапливаемых в процессе обучения знаний. Известно [6], что коэффициент усвоения K в процессе обучения хорошо аппроксимируется логарифмической зависимостью от x (t). Тогда уточненная модель представится в виде уравнения (7):

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}\ln[a + x^2(t-\tau)c]x(t-\tau) = b(t). \qquad (7)$$

Решения уравнения (7) разнообразны и неочевидны. Так, новым результатом является возможность получения решения в виде динамического хаоса. Причем, неожиданным фактом является возникновение динамического хаоса в отсутствии входа, т.е. в замкнутой системе (рис. 2)

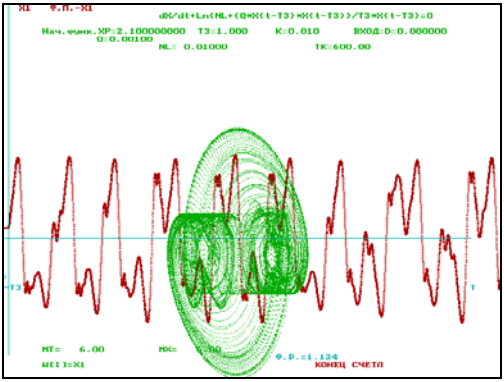

Рис.2. Динамический хаос в системе обучения

Факт возникновения динамического хаоса трактуется как необходимое условие генерации информации [8]. Важно, что информация может генерироваться не только в ответ на внешние воздействия (открытый вход), но и на основе накопленной внутренней памяти.

Дальнейшее усложнение модели обучения привело к учету второго контура управления процессом обучения, отражающего долговременную, генетическую память системы. Тогда новая модель обучения предстанет в виде следующей системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{f(y,z)}{\tau_{1\text{запаздывания}}} y(t-\tau_{1\text{запаздывания}}) = \beta, \\ \dfrac{dz}{dt} + kz(t-\tau_{2\text{запаздывания}}) = \dfrac{f(y,z)}{\tau_{1\text{запаздывания}}} y(t-\tau_{1\text{запаздывания}}), \end{cases} \tag{8}$$

где $f(y,z) = \ln\left[\dfrac{y(t)}{\tau_{1\text{запаздывания}}} + \dfrac{z(t-\tau_{1\text{запаздывания}})}{\tau_{2\text{запаздывания}}}\right]$.

Отличие от решения, представленного на рис.2, состоит в более высокой степени «хаотизации» решения, которое по внешнему виду неотличимо от реального физического хаоса.

Итак, математическая модель, записанная с помощью уравнения (6) с памятью, позволяет не только анализировать процедуру усвоения, запоминания информации в процессе обучения, но и изучать явление генерации новой информации обучаемым, что чрезвычайно важно в контексте фундаментализации образования, придания ему творческого характера самореализации личности.

Список литературы:

1. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М.: Наука, 1997.
2. Панарин А. С., Христианский фундаментализм против рыночного терроризма // Наш современник. 2003. № 1 – 2.
3. Солодова Е. А. Перспективные синергетические модели в педагогике. Синергетика. Труды семинара. Том 5. Материалы круглого стола «сложные системы: идеи, проблемы, перспективы». — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 21–38.
4. Солодова Е. А., Антонов Ю. П. Немарковские модели обучения. Синергетика. Труды семинара. Том 7. Материалы круглого стола «Проблемы открытости сложных эволюционирующих систем». — М.: Изд-во МИФИ, 2004. С.123–135.
5. Солодов А. В., Солодова Е. А. Системы с переменным запаздыванием. — М.: Наука, 1980. 384 с.
6. Голицин Г. А. Информация и творчество: на пути к интегральной культуре.
7. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. — М.: Знание, 1990.
8. Солодова Е. А. Исследование точности системы слежения за задержкой при наличии флуктуации времени запаздывания в цепи обратной связи // Радиотехника и электроника. 1979. № 3.

Солодова Е. А., Антонов Ю. П. — МКО — 2005, ч. 1, стр. 113 – 121
Solodova E. A., Antonov U. P. — MCE — 2005, vol. 1, p. 113 – 121

MATHEMATICAL SIMULATION OF THE HIGH EDUCATION SYSTEM

Solodova E. A., Antonov U. P.

(Russia, Moscow)

The different models in the education on every hierarchy level are considered in this article. The attention is paid on the fact that a methodological basis for such models is synergetics. It is shown, that a basic property of all intellectual systems is a memory. Signifies, as a parameter of the order about a system of low hierarchy level (didactic level) its memory should appear. In mathematician such systems are described by special class of differential equations with lagging argument. Due to presence of specific properties of the similar equations, they appear extremely attractive and promising with modeling of complicated processes of self – organizing.