

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛАСТИЧНОЙ МЕМБРАНЫ

Мальцева Л.С.

Санкт-Петербургский Государственный Университет,  
ф-т прикладной математики – процессов управления,  
каф. вычислительных методов механики деформируемого твёрдого тела,  
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35,  
тел. 89214384054 , E-mail agape8787@mail.ru

В работе рассматривается математическая модель тонкой круглой упругой мембраны единичного радиуса, закреплённой по внешнему контуру, представляющая собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\lambda_1} T_1 \frac{dr}{dr} \right) - T_2 - qr \frac{dz}{dr} &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left( r \frac{1}{\lambda_1} T_1 \frac{dz}{dr} \right) + qr \frac{dr}{dr} &= 0, \\ \frac{dr}{dr} &= \lambda_1 \cos \varphi, \quad \frac{dz}{dr} = -\lambda_1 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

$$z \left( r=0 \right) = 0, \quad \left. \frac{dz}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad r \left( r=0 \right) = 1, \quad z \left( r=1 \right) = 0.$$

В этих соотношениях  $r$  и  $z$  - координаты срединной поверхности деформированной мембраны,  $\varphi$  - угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности,  $T_1$  и  $T_2$  - усилия, а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  - кратности удлинения в меридиональном и окружном направлениях. Связь между напряжениями и деформациями задаётся соотношениями ( $\mu, n$  - параметры,  $h$  - толщина недеформированной мембраны):

$$T_1 = \frac{2h\mu}{n\lambda_1} (\lambda_1^n - \lambda_3^n), \quad T_2 = \frac{2h\mu}{n\lambda_2} (\lambda_2^n - \lambda_3^n). \quad (2)$$

Для построения численного решения нелинейной краевой задачи был разработан алгоритм, включающий в себя метод сеток, метод простой итерации и метод продолжения по параметру. Полученные решения сопоставлялись с результатами физических экспериментов по растяжению эластомерных мембран нормальным давлением ( $q$ ), проведённых на созданной автором установке. Растяжение мембран осуществлялось до прогибов, превышающих размеры опорного контура в 2-3 раза. Во всех экспериментах в зависимостях «нагрузка – максимальный прогиб» после выхода мембраны за границы опорного контура происходило падение давления. В теоретическом отношении все экспериментальные зависимости такого рода удалось описать, с помощью соотношений (1), принимая в (2)  $n \in [1; 2]$ .